PROFESSORES:
Daniel Paixão, Deric Simão, Edney Melo, Ivan Peixoto, Leonardo Bruno, Rodrigo Lins e Rômulo Mendes

COORDENADOR DE ÁREA:
Prof. Edney Melo

1. (exclusiva para alunos do 1º ano) – Neste problema você será apresentado a um método desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Leibnitz independentemente. Nele, você irá aprender a derivar a velocidade de um corpo em movimento tendo conhecimento apenas da sua função horária da posição.
Considere um móvel cuja equação horária é $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$, onde $x(t)$ é dado em metros e **t** em segundos.
   a) Qual a posição do móvel nos instantes $t_0 = 0s$, $t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$.
   Sabendo que a velocidade média de um móvel entre os instantes **t** e $t + \Delta t$ é dada por: $v_m = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.
   b) Determine a velocidade média do móvel nos intervalos (t_0, t_1), (t_1, t_2) e (t_0, t_2).

   Agora, vamos aprender a determinar a velocidade instantânea de um móvel num instante dado. Para calcular a velocidade do móvel no instante $t_1 = 1s$, proceda da seguinte maneira:
   c) Determine o valor da velocidade média do móvel entre t_1 e $t_1 + \Delta t$, em função de Δt.
   d) A velocidade do móvel é obtida fazendo-se $\Delta t = 0$ na expressão obtida no item anterior. Determine essa velocidade.
   e) Repita o mesmo procedimento dos itens (c) e (d) para determinar o valor da velocidade em qualquer instante de tempo **t**.

COMENTÁRIO:

a) $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$
Substituindo os valores
$x(t_0) = x(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ m
$x(t_1) = x(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$ m
$x(t_2) = x(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$ m

b) Usando a definição de velocidade média $v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

$$\underset{t_0 \to t_1}{v_m} = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{2}{1} = 2\,m/s \Rightarrow \underset{t_1 \to t_2}{v_m} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{7}{1} = 7\,m/s$$

c) $x(t_1) = 3 \cdot t_1^2 - 2t_1 + 1$

$$x(t_1 + \Delta t) = 3 \cdot (t_1 + \Delta t)^2 - 2(t_1 + \Delta t) + 1$$
$$= 3 \cdot t_1^2 + 6 \cdot t_1\, \Delta t + 3\Delta t^2 - 2t_1 - 2\Delta t + 1$$

$$\underset{t_1 \to t_1 + \Delta t}{v_m} = \frac{\cancel{3 \cdot t_1^2} + 6 \cdot t_1\, \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2 - \cancel{2t_1} - 2\Delta t + \cancel{1} - \cancel{3t_1^2} + \cancel{2t_1} - \cancel{1}}{\Delta t}$$

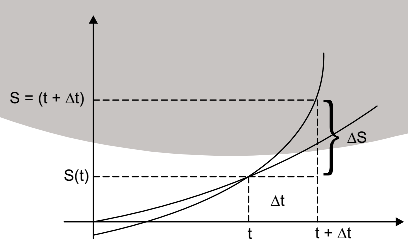
$$\underset{t_1 \to t_1 + \Delta t}{v_m} = \frac{6 \cdot t_1 \cdot \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6 \cdot t_1 + 3 \cdot \Delta t - 2$$

d) Fazendo $\Delta t \to 0$ a expressão de v_m se torna $v(t_1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m = 6 \cdot t_1 - 2t$.

e) Podemos utilizar a expressão do item (c) substituindo t_1 por t, temos que, $v_m = 6t + 3 \cdot \Delta t - 2$. Essa expressão nos dá a velocidade média entre dois instantes de tempo genéricos t e $t + \Delta t$, de modo que quando fazemos $\Delta t \to 0$ teremos a velocidade no instante t genérico. Vejamos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = 6t - 2$$

Graficamente teremos:



$v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ a medida que $\Delta t \to 0$ a curva se aproxima de uma reta, cujo comportamento é o de uma taxa constante de variação, daí quando $\Delta t \to 0$, v_m tende a um valor fixo que é interpretado como a taxa de variação instantânea da posição pelo tempo ou velocidade instantânea.

2. (Exclusiva para alunos do 1° ano) Segundo a teoria da Relatividade de Einstein, um elétron relativístico tem uma massa de repouso m_0 e uma massa inercial **m** definida pela seguinte equação:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde **v** é a velocidade do elétron relativa a um referencial inercial e **c** a velocidade da luz no vácuo. Esta equação implica que o elétron em movimento tem uma massa que depende da sua velocidade!

a) Escreva a energia cinética Newtoniana para o elétron usando a massa inercial da teoria de Einstein em função de m_0, **v** e **c**.

b) Segundo a teoria da Relatividade de Einstein a energia total do elétron é dada por:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

Onde **p** é o momento da partícula. Qual a diferença entre a energia do elétron na teoria de Newton e a relativística?

COMENTÁRIO:

a) De acordo com a teoria da relatividade, a energia cinética é dada pela diferença entre a energia total e a energia do repouso.

$$E_C = E - E_0 = E - m_0 \,.\, c^2 \quad (1):$$

mas, $E^2 = m_0{}^2 c^4 + p^2 \,.\, c^2 \Rightarrow E = \sqrt{m_0{}^2 c^4 + p^2 \,.\, c^2}$ onde, $p = \dfrac{m_0 \,.\, v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, m_0 \,.\, v \therefore \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (fator de Lorentz)

Reescrevendo (1), temos que:

$$E_C = \sqrt{m_0{}^2 c^4 + \gamma^2 m_0{}^2 \,.\, v^2 \,.\, c^2} - m_0 c^2$$

$$E_C = \sqrt{m_0{}^2 c^4 + \gamma^2 m_0{}^2 \,.\, v^2 \frac{c^2}{c^2} c^2} - m_0 c^2 \quad \left(\begin{matrix}\text{colocando em evidência} \\ m_0{}^2 c^4 \text{ dentro da raiz}\end{matrix}\right)$$

$$E_C = \sqrt{\left(m_0 c^2\right)^2 \,.\, \left[1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right]} - m_0 c^2$$

$$E_C = m_0 c^2 \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2$$

Fazendo $\beta = \frac{v}{c}$, temos: $\sqrt{1 + \dfrac{\beta^2}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \cancel{\beta^2} + \cancel{\beta^2}}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \beta^2}} = \gamma$

Por fim, temos:

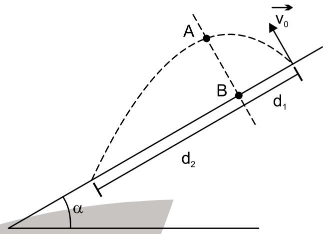
$$E_C = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

$$E_C = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

b) A energia total do elétron é dada por $E^2 = m_0{}^2 c^4 + p^2 \,.\, c^2$. Note que mesmo o elétron estando em repouso ainda sim possui energia, $E^2 = m_0{}^2 c^4 + \cancelto{0}{p^2} \,.\, c^2 \;\therefore\; E_0 = m_0 \,.\, c^2$ a chamada energia do repouso. Por outro lado, de acordo com a teoria newtoniana, um elétron em repouso não possui energia associada nesse estado.

Obs.: Estamos desconsiderando energia potencial elétrica envolvida.

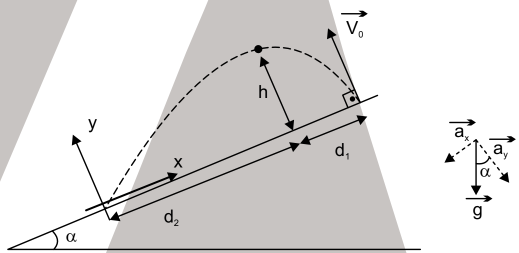
3. Uma partícula é lançada com velocidade v_0 perpendicularmente a um plano inclinado, de inclinação α com a horizontal, como mostra a figura. Determine:



a) A distância máxima $\overline{AB}$ que a partícula fica do plano inclinado.
b) O alcance da partícula ao longo do plano inclinado.
c) A razão entre d_1 e d_2 mostrada na figura. Obs.: Sendo A o ponto cuja partícula está à distância máxima do plano e B sua projeção sobre o mesmo, as distâncias d_1 e d_2 são definidas como a distância do ponto de lançamento a B, e a distância de B ao ponto de retorno da partícula ao plano, respectivamente.

COMENTÁRIO:

a) Considere o sistema de coordenadas representado na figura abaixo, em que a origem encontra-se no ponto onde a partícula colide com o plano inclinado.



Desse modo, o movimento pode ser descrito como a composição de dois MRUVs, em que são válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = (d_1 + d_2) - \dfrac{a_x t^2}{2} \rightarrow x = (d_1 + d_2) - \dfrac{g\,\text{sen}\alpha\,.t^2}{2} & \text{(I)} \\ y = v_0 t - \dfrac{a_y t^2}{2} \rightarrow y = v_0 t - \dfrac{g\cos\alpha\,.\,t^2}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Podemos ainda descrever o comportamento da velocidade em função do tempo.

$$\begin{cases} v_x = -a_x\,.\,t \rightarrow v_x = -g\,\text{sen}\alpha\,.\,t & \text{(III)} \\ v_y = v_0 - a_y\,.\,t \rightarrow v_y = v_0 - g\cos\alpha\,.\,t & \text{(IV)} \end{cases}$$

Quando a partícula encontra-se à distância máxima do plano inclinado, podemos afirmar que $v_y = 0$, o que ocorre em $t = \dfrac{v_0}{g\cos\alpha}$, verificado a partir da equação (IV). De acordo com a equação (II), a distância máxima $\overline{AB}$ será dada por:

$$y = v_0\,.\left(\frac{v_0}{g\cos\alpha}\right) - \frac{g\cos\alpha}{2}\,.\left(\frac{v_0}{g\cos\alpha}\right)^2$$

$$y = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} - \frac{v_0^2}{2g\cos\alpha}$$

$$\boxed{y = \frac{v_0^2}{2g\cos\alpha}}$$

b) O alcance da partícula ao longo do plano inclinado é determinado fazendo-se x = 0 e y = 0. Assim, a partir das equações (I) e (II), temos que:

$$\begin{cases} 0 = (d_1 + d_2) - \dfrac{g\,\text{sen}\alpha \,.\, t^2}{2} & \rightarrow \ (d_1 + d_2) = \dfrac{g\,\text{sen}\alpha}{2} \,.\, t^2 \\ 0 = v_0 t - \dfrac{g\cos\alpha \,.\, t^2}{2} & \rightarrow \ t = \dfrac{2v_0}{g\cos\alpha} \end{cases}$$

Portanto,

$$(d_1 + d_2) = \frac{g\,\text{sen}\alpha}{2} \,.\, \left(\frac{2v_0}{g\cos\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{(d_1 + d_2) = \frac{2v_0^2 \,.\, \text{sen}\alpha}{g\cos^2\alpha}}$$

c) Sabe-se que o tempo necessário para que a partícula atinja o ponto A é dado por $t = \dfrac{v_0}{g\cos\alpha}$. Substituindo este resultado na equação (I), temos que:

$$d_1 = (d_1 + d_2) - \frac{g\,\text{sen}\alpha}{2} \,.\, \left(\frac{v_0}{g\cos\alpha}\right)^2$$

$$d_2 = \frac{v_0^2\ \text{sen}\alpha}{2g\cos^2\alpha}$$

A partir do resultado obtido no item (B), podemos concluir que:

$$d_1 + \left(\frac{v_0^2\ \text{sen}\alpha}{2g\cos^2\alpha}\right) = \frac{2v_0^2\text{sen}\alpha}{g\cos^2\alpha}$$

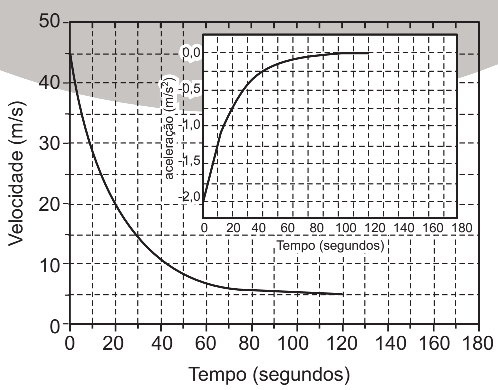
$$d_1 = \frac{3v_0^2\ \text{sen}\alpha}{2g\cos^2\alpha}$$

Portanto,

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\dfrac{3v_0^2\ \text{sen}\alpha}{2g\cos^2\alpha}}{\dfrac{v_0^2\ \text{sen}\alpha}{2g\ \cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = 3}$$

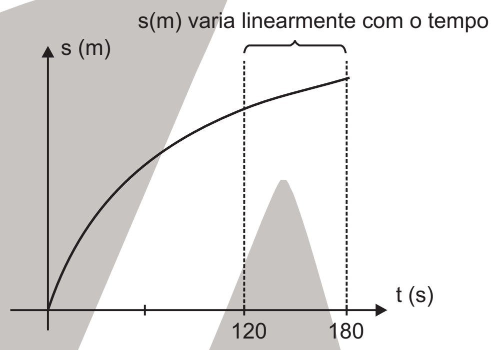
4. Um paraquedista de 80 kg em queda livre leva 3 minutos, após a abertura (início da contagem do tempo t = 0) do paraquedas, para atingir o solo de uma altura de 1700 m. O gráfico a seguir representa a velocidade do paraquedista nos primeiros dois minutos após a abertura do paraquedas. A dependência da aceleração do paraquedista está indicada no gráfico anexo ao da velocidade.



a) Faça um esboço do gráfico da distância percorrida pelo do paraquedista s(t) como função do tempo de queda a partir da abertura do paraquedas (s(0) = 0).
b) Estime a distância percorrida pelo paraquedista em t = 20 s.

COMENTÁRIO:

a) A função s(t) assumirá valores positivos, pois v(t) > 0 e a(t) < 0. Desse modo, o esboço do gráfico de s(t) é representado abaixo, onde é possível verificar que, a partir de t = 120s, o movimento do paraquedista é descrito aproximadamente como um MRU.



b) No intervalo 0 < t < 20s a aceleração varia linearmente, de modo que pode ser descrita como uma função do 1° grau nesse intervalo. Portanto, a partir do gráfico da aceleração, concluímos que:

$$a(t) \approx -2 + 0{,}0625t \text{ para } 0 < t < 20\text{s}$$

Fazendo uma analogia com as equações do MRUV

$$\begin{cases} a(t) = a \\ v(t) = v_0 + at \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Podemos concluir que, para o intervalo 0 < t < 20s, são válidas as seguintes funções:

$$a(t) \approx -2 + 0{,}0625t$$

$$\downarrow$$

$$v(t) \approx v_0 - 2t + \frac{0{,}0625}{2} \cdot t^2$$

$$\downarrow$$

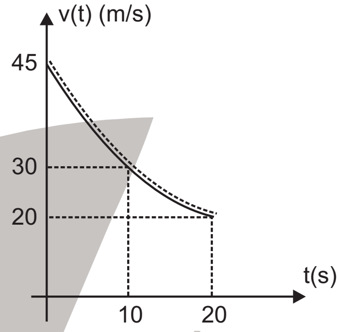
$$s(t) \approx s_0 + v_0 t - \frac{2}{2} t^2 + \frac{0{,}0625}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3$$

Sabe-se que $s_0 = 0$ e $v_0 = 45$ m/s. Portanto:

$$s(20) \approx 0 + 45 \cdot 20 - 20^2 + \frac{0{,}0625}{6} \cdot 20^3$$

$$\boxed{s(20) \approx 583 \text{ m}}$$

Esse problema possui ainda uma solução alternativa obtida através da análise do gráfico v x t. Sabe-se que a área sob a curva em um gráfico v x t representa o espaço percorrido. Assim, podemos aproximar a curva v(t) de modo que a área sob a curva no intervalo 0 < t < 20s corresponde a área de dois trapézios, como representado na figura abaixo.

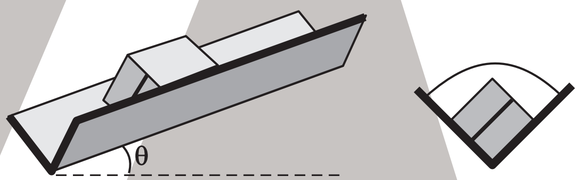


Portanto,

$$s(20) \approx \frac{(30+45).10}{2} + \frac{(20+30).10}{2}$$

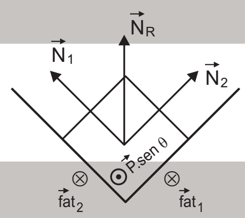
$$\boxed{s(20) \approx 625\ \text{m}}$$

5. Na figura a seguir, um caixote escorrega para baixo em uma vala inclinada cujos lados fazem um ângulo reto entre si. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a vala é μ_C. Qual é a aceleração do caixote em termos de μ_C, θ e **g**?



COMENTÁRIO:

Para um observador que analisa frontalmente o movimento de descida do bloco, temos que:



$N_1 = N_2 = N$
$fat_1 = fat_2 = fat$

Note que, para algumas forças, temos:
$\otimes$ $\rightarrow$ vetor entrando no plano da página.
$\odot$ $\rightarrow$ vetor saindo do plano da página.

Como se trata de planos inclinados, temos:

$$N_R = P \,.\, \cos\theta$$

$$N \,.\, \sqrt{2} = P \,.\, \cos\theta$$

$$N = \frac{P \,.\, \cos\theta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \,.\, P\cos\theta}{2}$$

Aplicando a segunda Lei de Newton, temos:

$$F_R = m \,.\, a$$

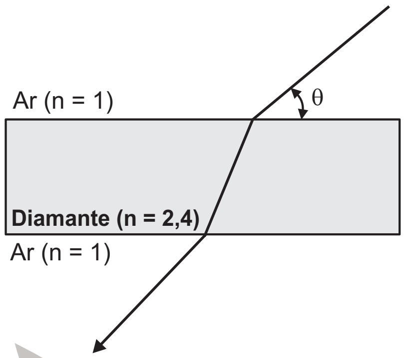
$$P \,.\, \text{sen}\theta - 2 \,.\, fat = m \,.\, a$$

$$mg \,.\, \text{sen}\theta - 2 \,.\, \mu \,.\, N = m \,.\, a$$

$$mg \,.\, \text{sen}\theta - 2 \,.\, \mu \,.\, \frac{\sqrt{2}.\, mg \,.\, \cos\theta}{2} = m \,.\, a$$

$$\boxed{a = g\left(\text{sen}\theta - \sqrt{2} \,.\, \mu \,.\, \cos\theta\right)}$$

6. O diamante é um material que possui um índice de refração de 2,4, maior, por exemplo, que o do vidro que tem um índice de refração de 1,5. Esta é uma das razões para que o diamante seja utilizado na fabricação de joias devido às múltiplas reflexões internas. No modelo representado ao lado um raio de luz penetra numa barra de diamante de faces planas e paralelas de espessura D e com um ângulo θ como indicado. Determine os valores para θ para que a luz fique confinada na barra (não saia mais para o ar).



COMENTÁRIO:

Seja α o ângulo de refração. Então, podemos escrever:

$$n_{AR} \cdot \text{sen}(90° - \theta) = n_{DIAMANTE} \cdot \text{sen}\alpha$$

$$\boxed{\cos\theta = 2{,}4\ \text{sen}\alpha} \quad \text{(I)}$$

A condição para que um raio de luz fique confinado é que α seja maior que o ângulo limite α_L, ou seja:

$$\boxed{\text{sen}\alpha > \text{sen}\alpha_L} \quad \text{(II)}$$

O ângulo limite α_L é determinado como segue:

$$n_{DIAMANTE} \cdot \text{sen}\alpha_L = n_{AR} \cdot \text{sen}\,90°$$

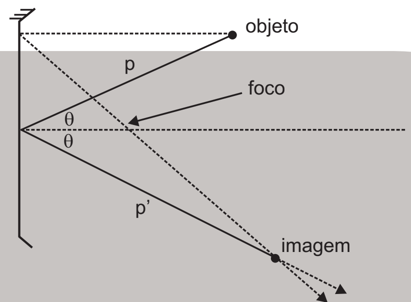
$$\boxed{\text{sen}\alpha_L = \frac{1}{2{,}4}} \quad \text{(III)}$$

Substituindo as equações (I) e (III) em (II), temos:

$$\frac{\cos\theta}{\cancel{2{,}4}} > \frac{1}{\cancel{2{,}4}} \rightarrow \cos\theta > 1$$

Não há valor de θ que satisfaça a inequação $\cos\theta > 1$. Portanto, nenhum raio de luz incidente sobre a interface ar/diamante será confinado dentro da barra.

7. Vamos determinar a posição da imagem formada por um espelho esférico (gaussiano) quando o objeto não se encontra sobre seu eixo principal, isto é, a linha normal ao espelho em seu centro.

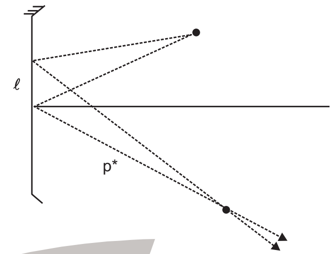


Sendo **p** a distância do objeto ao centro do espelho e θ o ângulo com relação ao eixo principal, e este suficientemente pequeno, para que as aproximações do espelho gaussiano continuem válidas. Considerando os raios ilustrados na figura acima vemos que se uma imagem bem definida se formar, ela deve estar no plano da figura e seu ângulo com relação ao eixo principal deve ser o mesmo θ.

a) Sendo **f** a distância focal do espelho, prove, usando os dois raios ilustrados (um que passa pelo centro e outro paralelo ao eixo principal) que p', a distância da imagem até o centro do espelho, deve obedecer a relação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{\cos\theta}{f}$$

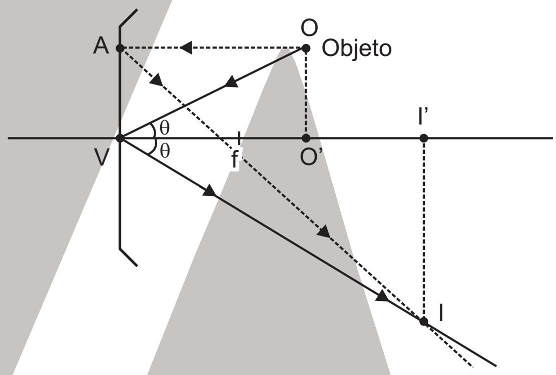
b) Vamos considerar agora outros raios que saem do corpo, para verificar se a imagem será bem definida, isto é, se todos os raios convergem para ela. No entanto, limitemo-nos ao plano da figura acima, pois fica mais complicado mostrar isso para raios fora do plano. Há um raio que sai do corpo e atinge o espelho, a uma distância **l** acima de seu centro, e se encontra com o raio que passava pelo centro a uma distância p* do centro do espelho, conforme a figura a seguir:



Mostre que p* = p’, isto é, todos os raios, independentemente de **l**, convergem para o mesmo ponto.

COMENTÁRIO:

a) Primeira solução:



Podemos observar que o triângulo ΔVOO' é semelhante ao ΔVII’, logo:

(I) $\frac{\overline{VO'}}{\overline{VI'}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{II'}}$

Também podemos ver que ΔAVf ~ ΔII’f, então:

(II) $\frac{\overline{AV}}{\overline{II'}} = \frac{\overline{Vf}}{\overline{fI'}}$

Como $\overline{AV} = \overline{OO'}$, da equação temos:

(III) $\frac{\overline{OO'}}{\overline{II'}} = \frac{\overline{Vf}}{\overline{fI'}}$

De (I) e (III), vem que:

(IV) $\frac{\overline{OO'}}{\overline{II'}} = \frac{\overline{VO'}}{\overline{VI'}} = \frac{\overline{Vf}}{\overline{fI'}} \therefore \frac{\overline{VO'}}{\overline{VI'}} = \frac{\overline{Vf}}{\overline{fI'}}$

Agora,

$\overline{VO'} = \overline{VO} \,.\, \cos\theta = p \,.\, \cos\theta$

$VI' = \overline{VI} \,.\, \cos\theta = p' \,.\, \cos\theta$

$\overline{Vf} = f$

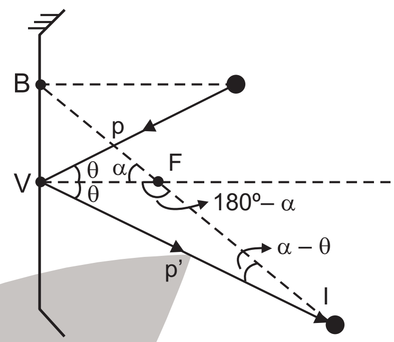
$\overline{fI'} = \overline{VI'} - \overline{Vf} = p'\cos\theta - f$

Substituindo em (IV), temos:

$$\frac{p\cancel{\cos\theta}}{p'\cancel{\cos\theta}} = \frac{f}{p'\cos\theta - f} \Rightarrow pp'\cos\theta - pf = p'f$$

$$\Rightarrow (V)\ \ pp'\cos\theta = pf + p'f \ \ (\div\, pp'f) \Rightarrow \frac{\cos\theta}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \ \ \text{(c.q.d.)}$$

Segunda solução:
Considere o ângulo α e os pontos I, V, B e F definidos na figura a seguir.



Aplicando-se a lei dos senos sobre o triângulo VFI, temos:

$$\frac{p'}{\text{sen}(180^\circ - \alpha)} = \frac{f}{\text{sen}(\alpha - \theta)}$$

$$p' \,.\, \text{sen}(\alpha - \theta) = f\,\text{sen}\alpha$$

$$p' \,.\, [\text{sen}\alpha \cos\theta - \text{sen}\theta \cos\alpha] = f\,\text{sen}\alpha$$

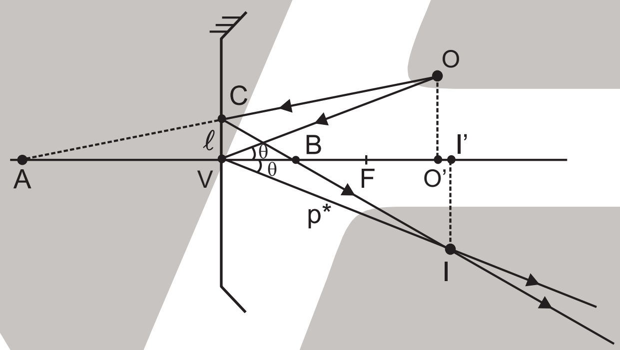
$$p' \,.\left[\frac{\cancel{BV}}{\cancel{BF}} \,.\cos\theta - \frac{\cancel{BV}}{p} \,.\, \frac{f}{\cancel{BF}}\right] = f \,.\, \frac{\cancel{BV}}{\cancel{BF}}$$

$$p'\cos\theta - \frac{f}{p} \,.\, p' = f$$

$$f\left(\frac{p+p'}{p}\right) = p'\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{\cos\theta}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$$

b)



$\overline{VI} = p^*$

$\overline{OO'} = o$

$II' = i$

$\overline{VF} = f$

$\overline{VO} = p$

$\overline{VC} = \ell$

$\overline{VB} = b$

$\overline{VA} = a$

I. ΔVBC ~ ΔBII', logo:

$$\frac{\overline{VC}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{II'}}{\overline{BI'}} \Rightarrow \frac{\ell}{b} = \frac{i}{p^*\cos\theta - b} \quad \text{(I)}$$

II. ΔAVC ~ AO'O, logo:

$$\frac{\overline{VC}}{\overline{AV}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{AO'}} \Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{o}{p\cos\theta + a} \quad \text{(II)}$$

III. ΔVOO' ~ ΔVII', logo:

$$\frac{\overline{VO}}{\overline{VI}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{II'}} \Rightarrow \frac{p}{p^*} = \frac{o}{i} \quad \text{(III)}$$

De (I) e (II), temos:

$$\frac{o}{i}=\frac{(p\cos\theta+a).\,\ell}{a}\cdot\frac{b}{\ell.\,(p^*.\cos\theta-b)}=\frac{b}{a}\cdot\frac{p.\cos\theta+a}{p^*.\cos\theta-b}\quad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV):

$$\frac{p}{p^*}=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{p\cos\theta+a}{p^*\cos\theta-b}\right)\Rightarrow app^*\cos\theta-apb=bpp^*\cos\theta+abp^*$$

$$\Rightarrow (a-b)pp^*\cos\theta=ab(p+p^*)$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{ab}=\frac{p+p^*}{pp^*\cos\theta}\Rightarrow\frac{-1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p\cos\theta}+\frac{1}{p^*\cos\theta}\quad \text{(V)}$$

Agora, lembremos que o objetivo do problema é estudar imagem quando esta e o objeto não estão no eixo principal. Dessa forma, já podemos assumir como válida a equação de Gauss quando o objeto e a imagem estão sobre esse eixo.

Assim, podemos assumir que o ponto A é um ponto objeto virtual e que sua imagem seria o ponto B. Sendo B um ponto imagem real. Logo, salta aos olhos que:

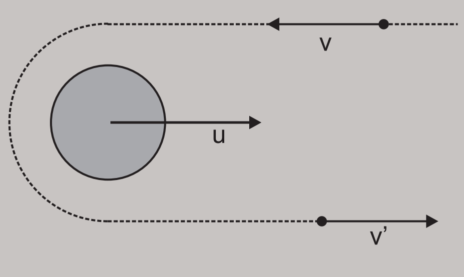
$$\frac{1}{f}=\frac{-1}{a}+\frac{1}{b}\quad \text{(VI)}$$

Por fim, comparando (V) e (VI), temos que:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p\cos\theta}+\frac{1}{p^*\cos\theta}\Rightarrow\frac{\cos\theta}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}$$

Comparando com a equação do item "a", concluímos que $\rho'=\rho^*$.

8. O efeito *estilingue gravitacional* já foi bastante usado para impulsionar naves e sondas espaciais sem gasto de combustível, apenas aproveitando-se do movimento de planetas. A sonda *Cassine*, lançada em 15 de outubro de 1997, aproveitou muito deste efeito, sendo acelerada duas vezes por Venus, depois pela Terra e Júpiter, seguindo para Saturno, seu destino final, chegando lá em 1° de julho de 2004. Consideremos um modelo simples para entender o mecanismo. Suponha uma nave se aproximando com velocidade **v** de um planeta (muito mais pesado que a nave) que se move em sua direção, com uma velocidade **u**. Estas velocidades estão sendo medidas em relação a um referencial inercial. Para simplificar, assuma que a nave apenas inverta o sentido de sua velocidade ao contornar o astro e que seus motores permaneçam desligados, isto é, ela contorna o planeta somente devido à atração gravitacional dele. A nave é então lançada com velocidade v', contrária à sua velocidade inicial.



Calcule então v', em função de **v** e **u**, assumindo que todas essas velocidades são paralelas.

COMENTÁRIO:

Seja v' a velocidade do planeta após a interação gravitacional. Então, pela conservação do momento linear, temos:

$$Mu - mv = Mu' + mv'$$

$$\boxed{u' = \frac{Mu - mv - mv'}{M}} \quad \text{(I)}$$

Da conservação de energia, temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mu'^2$$

$$\boxed{mv^2 + Mu^2 = mv'^2 + Mu'^2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo a equação (I) em (II), temos:

$$mv^2 + \cancel{Mu^2} = mv'^2 + \frac{1}{M}\left[\cancel{M^2u^2} + m^2(v+v')^2 - 2mMu(v+v')\right]$$

$$mM\left(v^2 - v'^2\right) = m(v+v')\left[m(v+v') - 2Mu\right]$$

$$\cancel{m}M\left(\cancel{v+v'}\right)(v-v') = \cancel{m}\left(\cancel{v+v'}\right)\left[m(v+v') - 2Mu\right]$$

$$Mv - Mv' = mv + mv' - 2Mu$$

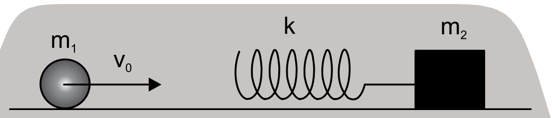
$$v' = \frac{Mv - mv + 2Mu}{m + M}$$

$$\boxed{v' = \frac{v - \frac{m}{M}v + 2u}{\frac{m}{M} + 1}} \quad \text{(III)}$$

Sabe-se que m << M. Portanto, $\frac{m}{M} \approx 0$. Substituindo esse resultado na equação (III), verificamos que:

$$\boxed{v' = v + 2u}$$

9. (Exclusiva para alunos do 1° ano) Uma massa m_1, com velocidade inicial v_0, atinge um sistema massa-mola, cuja massa é m_2, inicialmente em repouso, mas livre para se movimentar. A mola é ideal e possui constante elástica **k**, conforme a figura. Não há atrito com o solo.



a) Qual é a compressão máxima da mola?
b) Se, após um longo tempo, ambos os objetos, se deslocam na mesma direção, quais serão as velocidades finais v_1 e v_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente?

COMENTÁRIO:

a) Note que, como não há atritos, o bloco de massa m_2 também se movimenta, de modo que a compressão máxima da mola ocorrerá quando as duas massas possuírem uma mesma velocidade **v**. Pela conservação da quantidade de movimento do sistema, temos que:

$$Q_i = Q_f$$

$$m_1 \cdot v_0 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_0$$

Como se trata de um sistema livre de atritos, podemos conservar a energia mecânica do sistema. Desse modo, temos que:

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot v_0^2 + \frac{kx^2}{2}.$$

$$m_1 v_0^2 = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \cdot v_0^2 + kx^2$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(\frac{m_1^2 + m_1 \cdot m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\boxed{x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{k \cdot (m_1 + m_2)}}}$$

b) Para um caso geral de colisões elásticas em uma dimensão, temos que:

- Conservação da quantidade de movimento.

$$m_1 \cdot v_{1_i} + m_2 \cdot v_{2_i} = m_1 \cdot v_{1_f} + m_2 \cdot v_{2_f}$$

$$m_1 \cdot \left(v_{1_i} - v_{1_f}\right) = -m_2 \cdot \left(v_{2_i} - v_{2_f}\right) \quad \text{(I)}$$

- Conservação da energia mecânica:

$$\frac{m_1 \cdot v_{1_i}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2_i}^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_{1_f}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2_f}^2}{2}$$

$$m_1 \cdot \left(v_{1_i}^2 - v_{1_f}^2\right) = -m_2 \cdot \left(v_{2_i}^2 - v_{2_f}^2\right)$$

$$m_1 \cdot \left(v_{1_i} + v_{1_f}\right) \cdot \left(v_{1_i} - v_{1_f}\right) = -m_2 \cdot \left(v_{2_i} + v_{2_f}\right) \cdot \left(v_{2_i} - v_{2_f}\right) \quad \text{(II)}$$

- Dividindo (II) por (I), temos que:

$$v_{1_i} + v_{1_f} = v_{2_i} + v_{2_f} \quad \text{(III)}$$

- Da equação (I), temos que:

$$v_{1_i} - v_{1_f} = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \left(v_{2_i} - v_{2_f}\right) \quad \text{(IV)}$$

- Através de um sistema de equações entre (III) e (IV), temos que:

$$\begin{cases} v_{1_i} + \cancel{v_{1_f}} = v_{2_i} + v_{2_f} \\ v_{1_i} - \cancel{v_{1_f}} = -\dfrac{m_2}{m_1} \left(v_{2_i} - v_{2_f}\right) \end{cases}$$

$$2 \cdot v_{1_i} = v_{2_i} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) + v_{2_f} \cdot \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$2 \cdot v_{1_i} = v_{2_i} \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right) + v_{2_f} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

$$v_{2_f} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) = 2 \cdot v_{1_i} - v_{2_i}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right)$$

$$v_{2_f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2_i} \quad \text{(V)}$$

- Da equação (III), temos que:

$$v_{1_i} + v_{1_f} = v_{2_i} + v_{2_f}$$

$$v_{1_f} = v_{2_i} + v_{2_f} - v_{1_i}$$

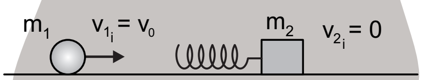
$$v_{1_f} = v_{2_i} + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2_i} - v_{1_i}$$

$$v_{1_f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) \cdot v_{1_i} + \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2_i}$$

$$v_{1_f} = \left(\frac{2m_1 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1_i} + \left(\frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2_i}$$

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1_i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2_i} \quad \text{(VI)}$$

- Para a situação apresentada no problema, temos que:



- Da equação (VI), temos que:

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1_i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot \cancelto{0}{v_{2_i}}$$

$$\boxed{v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_0}$$

- Da equação (V), temos que:

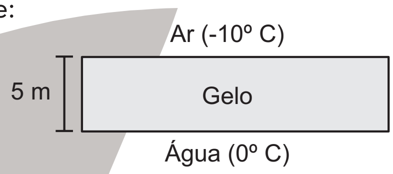
$$v_{2_f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot \cancelto{0}{v_{2_i}}$$

$$\boxed{v_{2_f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0}$$

10.(exclusiva para alunos do 1° ano) Em uma região de inverno rigoroso, um tanque com água é deixado aberto ao ar livre até que se forme sobre a superfície da água uma camada de gelo com espessura igual a 5 cm. O ar acima da água está a –10°C. Calcule a taxa de formação de gelo (em cm/h) sobre a superfície inferior da camada de gelo. Considere a condutividade térmica, a densidade e o calor de fusão do gelo como sendo 0,0040 cal/s . cm °C, 0,92 g/cm³ e 80 cal/g, respectivamente. Assuma que nenhuma quantidade de calor deixa ou passa para a água através das paredes do tanque.

COMENTÁRIO:

Do enunciado do problema, temos que:



Sabemos que o fluxo de calor é dado pela Lei da Condução Térmica de Fourier. Desse modo:

$$\phi = \frac{Q_L}{\Delta t} = \frac{K\,.\,A\,.\,\Delta\theta}{e}$$

Para uma vazão de massa de gelo formada, $\frac{\Delta m}{\Delta t}$, temos que:

$$\frac{\Delta m\,.\,L_S}{\Delta t} = \frac{K\,.\,A\,.\,\Delta\theta}{e}$$

$$\frac{d_G\,.\,\Delta V_G\,.\,L_S}{\Delta t} = \frac{K\,.\,A\,.\,\Delta\theta}{e}$$

$$\frac{d_G\,.\,A\,.\,\Delta h\,.\,L_S}{\Delta t} = \frac{K\,.\,A\,.\,\Delta\theta}{e}$$

$$\frac{d_G\,.\,\Delta h\,.\,L_S}{\Delta t} = \frac{K\,.\,\Delta\theta}{e}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{K\,.\,\Delta\theta}{e\,.\,d_G\,.\,L_S}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{40\,.\,10^{-4}\,.\left[0-(-10)\right]}{5\,.\,0{,}92\,.\,80}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{10^{-4}}{0{,}92}\,\frac{cm}{s}$$

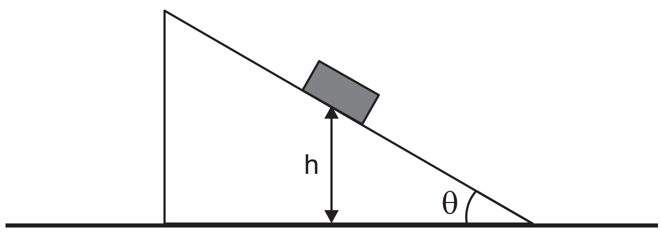
Sabemos que 1s = $\frac{1\,h}{3600}$. Desse modo:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{10^{-4}}{0{,}92}\,.\,\frac{cm}{\frac{1\,h}{3600}}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{10^{-4}\,.\,0{,}36\,.\,10^{4}}{0{,}92}\,\frac{cm}{h}$$

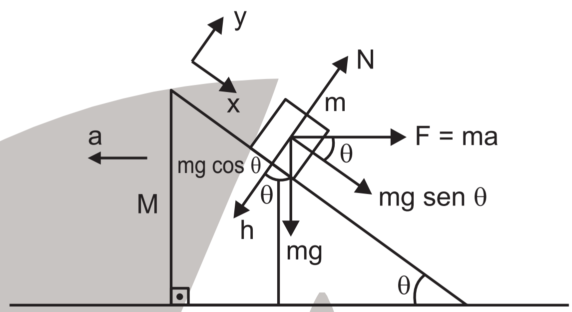
$$\boxed{\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{9}{23}\,cm/h}$$

11.Considere um plano inclinado (uma cunha) de massa M e ângulo de inclinação θ que pode deslizar sem atrito sobre o chão. Um pequeno bloco de massa **m** também pode deslizar sem atrito sobre a superfície do plano inclinado.



O bloco é então solto a partir do repouso, de um altura **h** em relação ao solo.
a) Calcule a aceleração da cunha, em função de m, M, θ e g (a gravidade local).
b) Calcule a velocidade da cunha quando o bloco chegar ao chão. Expresso o resultado em termos de m, M, θ, h e g.

COMENTÁRIO:



a) No referencial do plano inclinado, temos em **m**.

$$\begin{cases} ma\cos\theta + mg\,\text{sen}\theta = max & (1) \\ N + ma\,\text{sen}\theta - mg\cos\theta = may = 0 & (2) \end{cases}$$

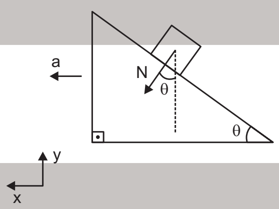
de (2), temos:
N = mg cos θ – mg sen θ)
N = m(g cos θ – a sen θ)

Voltando ao referecial no solo, temos:

$$N\text{sen}\theta = M\,.\,a$$

$$a = \frac{N\text{sen}\theta}{M} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3), temos que:



$$a = \frac{N}{M}\text{sen}\theta = \frac{m\left[g\cos\theta - a\text{sen}\theta\right].\,\text{sen}\theta}{M}$$

$$a\,.\,M = mg\text{sen}\theta\cos\theta - m\,.\,a\,.\,\text{sen}^2\theta$$

$$a = \frac{mg\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta}{\left(M + m\text{sen}^2\theta\right)}$$

b)
(i) Conservação da energia:

$$\boxed{\frac{mv_m^{\ 2}}{2} + \frac{Mv_m^{\ 2}}{2} = m\,.\,g\,.\,h} \quad \text{(I)}$$

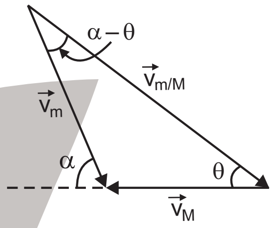
(ii)Conservação do momento linear:
Considere o ângulo α formado entre $\overrightarrow{v_m}$, o vetor que representa a velocidade do bloco em relação ao solo, e o plano horizontal. Então, podemos escrever:

$$\boxed{mv_m\cos\alpha = Mv_m} \quad \text{(II)}$$

(iii) Relatividade galileana:

$$\boxed{\overrightarrow{v_{m/M}} = \overrightarrow{v_m} - \overrightarrow{v_M}} \quad \text{(III)}$$

A partir da equação (III) podemos elaborar o seguinte diagrama vetorial.



Do diagrama vetorial, verificamos que:

$$\boxed{\frac{v_M}{\text{sen}(\alpha - \theta)} = \frac{v_m}{\text{sen}\theta}} \quad \text{(IV)}$$

(iv) Equações (II) e (IV):

$$v_m(\text{sen}\alpha\cos\theta - \text{sen}\theta\cos\alpha) = v_M\text{sen}\theta$$

$$v_m\left(\cos\theta\sqrt{\frac{1 - M^2 v_M{}^2}{m^2 \, . \, v_m{}^2}} - \text{sen}\theta \, . \, \frac{Mv_M}{mv_m}\right) = v_m\text{sen}\theta$$

$$\frac{v_m\cos\theta}{mv_m} \, . \, \sqrt{m^2 v_m{}^2 - M^2 v_M{}^2} - \frac{Mv_M}{m}\text{sen}\theta = v_M\text{sen}\theta$$

$$\sqrt{m^2 v_m{}^2 - M^2 v_M{}^2} = mv_m\text{tg}\theta + Mv_M\text{tg}\theta$$

$$m^2 v_m{}^2 - M^2 v_M{}^2 = v_M{}^2\text{tg}^2\theta\,(m + M)^2$$

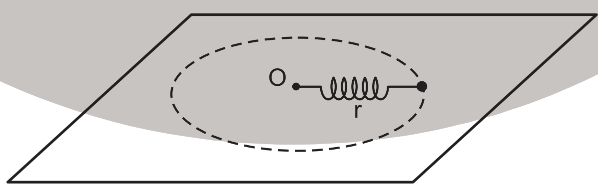
$$\boxed{v_M{}^2 = \frac{m^2 v_m{}^2}{M^2 + \text{tg}^2\theta\,(m + M)^2}} \quad \text{(V)}$$

(v) Equações (I) e (V):

$$\frac{mv_m{}^2}{2} + \frac{M}{2}\left[\frac{m^2 v_m{}^2}{M^2 + \text{tg}^2\theta(m + M)^2}\right] = m \, . \, g \, . \, h$$

$$\boxed{v_m = (2gh)^{1/2}\left[1 + \frac{Mm}{M^2 + \text{tg}^2\theta(m + M)^2}\right]^{-1/2}}$$

12. Um corpo de massa **m** é conectado por uma mola num ponto O sobre uma superfície horizontal, sobre a qual o corpo pode se mover sem atritos.



O comprimento relaxado da mola é ℓ_0 e sua constante elástica é **k**. Num dado instante, a distância do corpo até o ponto O é **r**. Suponha que se faça o corpo girar com frequência angular ω e no instante inicial ele não possui nenhuma componente radial de velocidade.

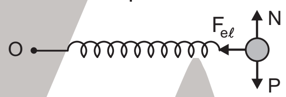
a) Calcule o raio de equilíbrio $r = r_0$ para o qual o corpo realiza movimento circular em torno de O. Expresse r_0 em termos de m, k, ℓ_0 e ω.

b) Calcule o período de pequenas oscilações radiais do corpo em relação ao raio de equilíbrio r_0. Imagine que inicialmente o corpo se encontrava em movimento circular em r_0 e com velocidade angular ω_0 quando uma pequena perturbação radial fez com que ela começasse a oscilar. Dê o resultado em função de k, m e ω_0.

Você pode precisar usar que $(1+x)^n \approx 1+nx$, se x << 1.

COMENTÁRIO:

a) Identificando as forças atuantes na mola, temos que:



Note que a força elástica atua como resultante centrípeta. Desse modo, temos que:

$$F_{cp} = F_{e\ell}$$

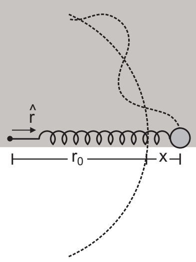
$$m \cdot \omega^2 \cdot r_0 = k \cdot (r_0 - \ell_0)$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r_0 - k \cdot r_0 = -k \cdot \ell_0$$

$$r_0 \cdot (k - m \cdot \omega^2) = k \cdot \ell_0$$

$$\boxed{r_0 = \frac{k \cdot \ell_0}{k - m \cdot \omega^2}}$$

b) Considerando que o corpo foi deslocado de uma pequena distância **x** a partir de $r = r_0$ (deslocamento radial), temos que:



- Para um referencial no corpo, temos que:

$$k \cdot (r_0 - \ell_0) = m \cdot \omega_0{}^2 \cdot r_0 \quad \text{(I)}$$

$$\downarrow$$

movimento circular com raio r_0

Deslocamento de uma distância **x**, temos que:

$$-k \cdot (r_0 + x - \ell_0) + m \cdot \omega^2 \cdot (r_0 + x) = m \cdot a \quad \text{(II)}$$

Obs.: É necessário que encontremos uma relação entre ω e ω_0. Para isso, precisamos conhecer a definição de momento angular $\vec{L}$, o qual é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$$

em que:

$\vec{r} \rightarrow$ vetor posição da partícula

$\vec{p} \rightarrow$ momento linear da partícula

Em módulo, como $\vec{r} \perp \vec{p}$, temos que:
$L = r \cdot p = r \cdot m \cdot v$
$L = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = \omega \cdot r^2$

Como se trata de um sistema isolado, o momento angular $\vec{L}$ é conservado (essa grandeza está associada ao movimento rotacional de uma partícula), de modo que:

$$L_0 = L$$

$$\cancel{m} \cdot \omega_0 \cdot r_0^2 = \cancel{m} \cdot \omega \cdot (r_0 + x)^2$$

$$\omega \cdot (r_0 + x)^2 = \omega_0 \cdot r_0^2$$

$$\omega = \frac{\omega_0 \cdot r_0^2}{(r_0 + x)^2} \quad \text{(III)}$$

Substituindo a equação (III) em (II), temos que:

$$-k \cdot (r_0 - \ell_0) - k \cdot x + m \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot r_0^4}{(r_0 + x)^4} \cdot (r_0 + x) = m \cdot a$$

$$-m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0 - kx + m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0^4 \cdot (r_0 + x)^{-3} = m \cdot a$$

$$-m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0 - kx + m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0^4 \cdot \left[r_0 \left(1 + \frac{x}{r_0} \right) \right]^{-3} = m \cdot a$$

Note que, como $x << r_0$, temos que:

$$\left(1 + \frac{x}{r_0} \right)^{-3} = 1 - \frac{3x}{r_0}$$

Logo, temos:

$$-m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0 - kx + m \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{r_0^4}{r_0^3} \cdot \left(1 - \frac{3x}{r_0} \right) = m \cdot a$$

$$-m \cdot \cancel{\omega_0^2} \cdot r_0 - kx + m \cdot \cancel{\omega_0^2} \cdot r_0 - 3 \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot x = m \cdot a$$

$$-\left(k + 3\, m \cdot \omega_0^2 \right) x = m \cdot a$$

$$a = -\left(\frac{k + 3\, m\, \omega_0^2}{m} \right)$$

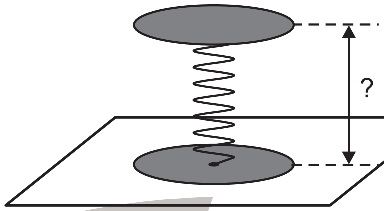
Note que se trata de um movimento harmônico simples na direção radial, de modo que:

$$\omega'^2 = \frac{k + 3\, m \cdot \omega_0^2}{m}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{k + 3\, m \cdot \omega_0^2}{m}$$

$$\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = \frac{m}{k + 3\, m \cdot \omega_0^2} \rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k + 3\, m \cdot \omega_0^2}}}$$

13. Dois discos estão ligados por uma mola de constante elástica **k**. Cada disco tem massa **m** e a gravidade local vale **g**. Eles estão sobre o chão, conforme o desenho a seguir.



Quando o sistema está em equilíbrio (em repouso) sob a ação do peso, a distância entre os discos é ℓ.

a) Calcule o comprimento ℓ_0 relaxado desta mola, isto é, quando a mola não está nem distendida nem comprimida. Dê o resultado em termos dos parâmetros básicos deste problema, que são **m**, ℓ, **k** e **g**.

Pressiona-se o disco superior para baixo, deslocando-o de uma quantidade **x**, e o mantém assim em repouso. Solta-se então o sistema.

b) Supondo que o disco inferior não perde contato com o solo, mostre que o disco superior realizará movimento harmônico simples e calcule seu período, em termos dos parâmetros básicos do problema.

c) Há um valor máximo de **x** para qual a suposição do item anterior seja válida, isto é, que o disco inferior não perda o contato com o solo. Chame este x^+ limite de x_0 e calcule-o em termos dos parâmetros básicos.

d) Pressionando-se o disco superior de um $x > x_0$, o disco inferior será levantado da mesa. Calcule a altura máxima atingida pelo centro de massa do sistema, em termos de **x** e dos parâmetros básicos.

e) Enquanto o sistema estiver todo no ar, os discos vão oscilar em relação ao centro de massa. Calcule o período dessas oscilações em função dos parâmetros básicos.

COMENTÁRIO:

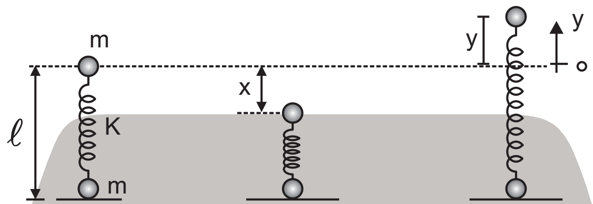
a) O disco superior estará em equilíbrio quando os módulos das forças elástica e peso forem iguais. Assim,

$$F_E = P$$

$$k\left(\ell_0 - \ell\right) = m \,.\, g$$

$$\boxed{\ell_0 = \ell + \frac{mg}{k}}$$

b) Considere o eixo vertical e sua origem representados na figura abaixo.



Desse modo, podemos escrever para o disco superior:

$$F_R = m \,.\, a$$

$$-P - k\left(\ell + y - \ell_0\right) = m \,.\, a$$

$$-mg - ky - k\left(-\frac{mg}{k}\right) = m \,.\, a$$

$$-ky = m \,.\, a$$

$$\boxed{y = -\frac{m}{k} \,.\, a}$$

Essa equação tem a forma $y = -\omega a^2$, que representa um movimento descrito por um MHS. A amplitude do MHS é **x**, pois o disco superior oscilará em torno de sua posição de equilíbrio. Portanto, a altura máxima alcançada pelo disco superior é ℓ + x. Podemos escrever:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

c) O disco inferior perderá contato com o solo quando a força elástica for maior que seu peso. Assim:

$$F_E > P$$

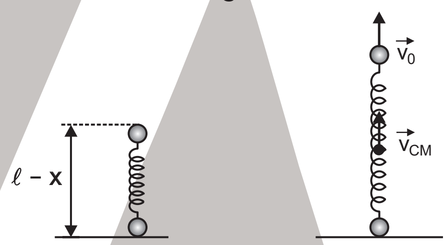
$$k\left[\left(\ell + x_0\right) - \ell_0\right] > mg$$

$$kx_0 + k\left(-\frac{mg}{k}\right) > mg$$

$$kx_0 > 2mg$$

$$\boxed{x_0 > \frac{2mg}{k}}$$

d) Seja v_0 a velocidade do disco superior quando o disco inferior perde contato com o solo, neste instante a velocidade do centro de massa do sistema é $v_{cm} = \frac{v_0}{2}$ e a deformação da mola é $\Delta x = \frac{mg}{k}$. Pela conservação de energia a partir dos estados do sistema definido na figura abaixo temos:



$$mg\left(\ell - x\right) + \frac{k}{2}\left[\ell_0 - \left(\ell - x\right)\right]^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k}{2}\left[\cancel{\ell_0} - \left(\cancel{\ell_0} + \Delta x\right)\right]^2 + mg\left(\ell_0 + \Delta x\right)$$

$$\cancel{mg\ell} - mgx + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k} + x\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \cancel{mg\ell} + mg\left(\frac{mg}{k}\right) + mg\left(\frac{mg}{k}\right)$$

$$-mgx + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} + 2\frac{k}{2}\cdot\frac{mg}{k}x = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k}{2}\cdot\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2mg\left(\frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2m^2g^2}{k}$$

$$k^2x^2 = mkv_0^2 + 4m^2g^2$$

$$\boxed{v_0^2 = \frac{k^2x^2 - 4m^2g^2}{mk}}$$

Portanto, $v_{cm} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{k^2x^2 - 4m^2g^2}{mk}}$.

Aplicando a equação de Torricelli para o centro de massa do sistema, temos:

$$v_{cm}^2 = 2gh_{máx}$$

$$h_{máx} = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{k^2x^2 - 4m^2g^2}{mk}}\right)^2 \rightarrow \boxed{h_{máx} = \frac{1}{8g}\cdot\left(\frac{k^2x^2 - 4m^2g^2}{mk}\right)}$$

e) Seja Δy a deformação da mola e a_s a aceleração do disco superior em relação ao solo, temos:

$$F_R = m\,.\,a$$

$$-F_E - P = m\,.\,a_s$$

$$-k\Delta y - mg = m\,.\,a_s$$

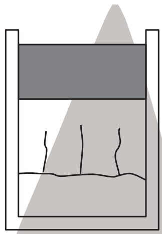
Sabe-se que $a_s = a_{s/cm} - g$, onde $a_{s/cm}$ é a aceleração do disco superior em relação ao centro de massa. Assim:

$$-k\Delta y - mg = m\left(a_{s/cm} - g\right)$$
$$-k\Delta y = ma_{s/cm}$$
$$\boxed{\Delta y = -\frac{m}{k}\,.\,a_{s/cm}}$$

Essa é a equação que descreve um MHS de período:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

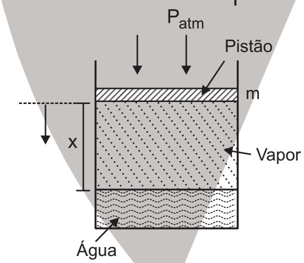
14. Um cilindro de paredes condutoras térmicas possui um êmbolo de massa **m** bem ajustado (mas sem atritos), cuja secção de área transversal é S. O cilindro contém água e vapor à temperatura T = 100°C, ou seja, estão na temperatura de condensação



Observa-se que o êmbolo cai vagarosamente à velocidade constante **v**, porque alguma quantidade de calor flui através das paredes do cilindro e fazendo que um pouco de vapor se condense continuamente. A densidade de vapor no interior do recipiente é ρ.

a) Calcule a taxa de condensação do vapor, variação de massa de vapor por unidade de tempo, em termos dos parâmetros dados no problema.
b) A que taxa o calor flui para fora do cilindro? Dê o resultado em função do calor de condensação L da água e dos outros dados do problema.
c) Qual a taxa de variação da energia interna do vapor? O calor específico molar a volume constante da água é C_V e sua massa molar é M.
d) E qual a taxa de variação da energia interna da água líquida?

COMENTÁRIO:
Do enunciado do problema, temos que:



a) A velocidade do pistão é dada por

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

reescrevendo como

$$v = -\frac{\Delta x\,.\,A}{\Delta t\,.\,A} = -\frac{1}{A}\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta v = \text{variação de volume} \\ v = \text{velocidade do pistão} \\ A = \text{Área do pistão} \\ \rho = \text{densidade do vapor d'água} \end{cases}$$

mas,

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta v} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta m}{\rho}$$

Substituindo em (1):

$$v = \frac{-1}{A.\rho} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\rho \cdot A \cdot v$$

O sinal negativo implica no decréscimo da massa de vapor no cilindro. Note que a densidade e a pressão do vapor se mantém constante durante o processo, pois são funções apenas da temperatura.

b) O calor que flui para fora do cilindro se deve a condensação do vapor. Logo:

$$\Delta Q = \Delta m \cdot L_v$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot L_v \qquad \frac{\Delta m}{\Delta t} = -\rho \cdot A \cdot v$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\rho \cdot A \cdot v \cdot L_v$$

c) A variação da energia interna do vapor pode ser determinada considerando-o como um gás ideal.

$E_v = n \cdot C_v \cdot T \qquad E_v$ = energia interna do vapor

$$E_v = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot T$$

$$\frac{\Delta E_v}{\Delta t} = \frac{1}{M}\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot C_v \cdot T$$

T sendo constante, a variação de E_v depende da variação de **m**

Substituindo $\frac{\Delta m}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta E_v}{\Delta t} = -\frac{\rho \cdot A \cdot v \cdot C_v \cdot T}{M}$$

d) A variação da energia interna total do sistema e a soma das variações da energia interna do vapor e da água líquida para o sistema água-vapor.

$$\Delta E_T = \Delta Q - \Delta W$$

$$\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - P\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Delta W = -P \cdot \Delta v$$

ΔE_T = variação da energia interna do sistema água-vapor

$$P = P_{atm} + \frac{mg}{A}$$

Substituindo os valores encontrados nos itens anteriores

$$\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = -\rho \cdot A \cdot v \cdot L_v - \left(P_{atm} + \frac{mg}{A}\right) \cdot (-A \cdot v)$$

$$\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = -\rho \cdot A \cdot v \cdot L_v + \left(P_{atm} + \frac{mg}{A}\right) \cdot A \cdot v$$

mas,

$$\frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \frac{\Delta E_V}{\Delta t} + \frac{\Delta E_a}{\Delta t}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{taxa de variação}\\ \text{da energia interna}\\ \text{total}\end{array}\right) = \left(\text{... do vapor}\right) + \left(\text{... da água}\right)$$

Daí,

$$\frac{\Delta E_a}{\Delta t} = \frac{\Delta E_T}{\Delta t} - \frac{\Delta E_V}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta E_a}{\Delta t} = -\rho \,.\, A \,.\, v \,.\, L_v + \left(P_{atm} + \frac{mg}{A}\right) .\, A \,.v + \frac{\rho \,.\, A \,.\, v . C_v \,.T}{M}$$

$$\frac{\Delta E_a}{\Delta t} = A \,.\, v \left[\frac{\rho \,.\, C_v \,.\, T}{M} - \rho \,.\, L_v + P_{atm} + \frac{mg}{A}\right]$$

15. Há um copo de água em contato com o ambiente, e ambos se encontram a uma temperatura T_0.

a) Mostre, usando o conceito de entropia (e a segunda lei da termodinâmica), que não é natural ver a água do copo variar sua temperatura e resolver se manter em equilíbrio a uma temperatura diferente de T_0.

Dicas: A variação de entropia associada à variação de temperatura de uma massa **m** de um corpo com calor específico **c**, que vai de uma temperatura T_0 até T é:

$$\Delta S = mc \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

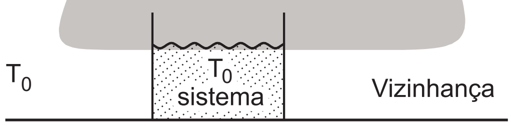
Onde ln é o logaritmo natural.
Você pode usar também a desigualdade $\ell_n(1 + x) < x$, para todo x > 1 e diferente de 0.

b) Dois corpos em contato térmico se encontram isolados do resto do universo. Eles possuem massas e calores específicos m_1, c_1 e m_2, c_2, com os índices (1, 2) se referindo a cada corpo. Se ambos estão na mesma temperatura T_0, mostre que não é esperado que eles troquem calor e se equilibrem (termicamente) em temperaturas diferentes.

Dica: use que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, se x << 1

COMENTÁRIO:

a) De acordo com a 2ª Lei da Termodinâmica, a entropia de um sistema mais vizinhança aumenta ou se mantém constante, aumenta para processos irreversíveis e se mantém constante para processos reversíveis, ou seja:



$\Delta S_u > 0$

Note que $\Delta S_u < 0$ ocorreria para um processo que não ocorre espontaneamente na natureza.
Suponha que a vizinhança cedesse calor ao sistema, mesmo estando os dois em equilíbrio, teremos:

$$\Delta S_u = \Delta S_{sis} + \Delta S_{viz}$$

$$\Delta S_u = m \,.\, c \,.\, \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) - \frac{\Delta Q}{T_0}$$

$$\Delta S_u = m \,.\, c \,.\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) - m \,.\, c \,.\, \frac{\Delta T}{T_0}$$

$$\Delta S_u = mc \,.\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) - \frac{\Delta T}{T}\right] < 0$$

Pois $\ln(1 + x) < x$

b) Suponha agora que m_1 cedesse calor a m_2, teríamos:

m_1, c_1 T_0	m_2, c_2 T_0

Para o sistema isolado $\Delta S_s \geq 0$

$\Delta S_s > 0$ processos irreversíveis

$\Delta S_s = 0$ processos reversíveis

$\sum Q = 0$

$-m_1 \,.\, c_1 \,.\, \Delta T_1 + m_2 \,.\, c_2 \,.\, \Delta T_2 = 0$

$m_1 \,.\, c_1 \,.\, \Delta T_1 = m_2 \,.\, c_2 \,.\, \Delta T_2 \qquad (1)$

$$\Delta S_s = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1 \,.\, c_1 \,.\, \ln\left(\frac{T_0 - \Delta T_1}{T_0}\right) + m_2 \,.\, c_2 \left(\frac{T_0 + \Delta T_2}{T_0}\right)$$

$$\Delta S = m_1 \,.c_1 .\ln\left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right) + m_2 \,.c_2 \,.\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_0}\right)$$

Usando (1):

$$\Delta S = m_1 \,.c_1 .\ln\left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right) + m_1 \,.c_1 \,.\, \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \,.\ln\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_0}\right)$$

$$\Delta S = m_1 \,.c_1 .\ln\left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right) + m_1 \,.c_1 \,.\ln\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_0}\right)^{\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

$$\Delta S = m_1 \,.c_1 .\ln\left[\left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right).\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_0}\right)^{\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}\right]$$

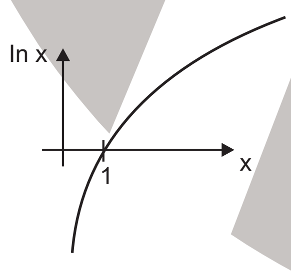
mas,

$$\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_0}\right)^{\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} \cong 1 + \left(\frac{\Delta T_1}{\cancel{\Delta T_2}}\right).\,\frac{\cancel{\Delta T_2}}{T_0} = 1 + \frac{\Delta T_1}{T_0}$$

Daí,

$$\Delta S = m_1 \,.c_1 \,.\ln\left[\left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right).\left(1 + \frac{\Delta T_1}{T_0}\right)\right]$$

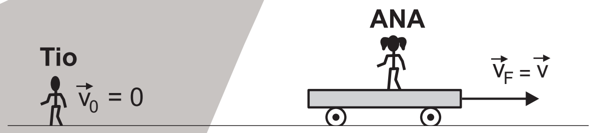
$$\Delta S = m_1 \,.c_1 \,.\ln\left[1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\right] < 0, \text{ pois:}$$



16. Ana Beatriz está sentada próxima à janela aberta de um trem movendo-se à velocidade **v** para o norte. Seu tio está parado perto dos trilhos vendo o trem se afastar. O apito da locomotiva vibra com frequência f_0 e a velocidade do som no ar vale **s**.
   a) Se o ar estiver parado, quais são as frequências ouvidas pelo tio e por Ana, em função de v, f_0 e s?
   b) Se um vento constante e uniforme soprar à velocidade **u** para norte, quais serão as frequências ouvidas pelo tio e por Ana, em função de v, f_0, s e u?

COMENTÁRIO:

a) Neste caso podemos considerar o esquema a seguir:



A frequência aparente é determinada através da equação $f' = f_0\left(\dfrac{v_{som} \pm v_{observador}}{v_{som} \pm v_{fonte}}\right)$. Assim, para o tio de Ana, temos:

$$\boxed{f_{tio} = f_0\left(\frac{s}{s+v}\right)}$$

Para Ana, temos:

$$f_{ana} = f_0\left(\frac{s+v}{s+v}\right) \rightarrow \boxed{f_{ana} = f_0}$$

b) A velocidade do tio de Ana em relação ao vento é dada por:

$$\vec{v}_{tio/vento} = \vec{v}_{tio} - \vec{v}_{vento}$$

$$\vec{v}_{tio/vento} = -\vec{v}_{vento}$$

A velocidade de Ana em relação ao vento é dada por:

$$\vec{v}_{Ana/vento} = \vec{v}_{Ana} - \vec{v}_{vento}$$

$$\boxed{\left|\vec{v}_{Ana/vento}\right| = \begin{cases} v-u,\ v>u \ (\text{para a direita}) \\ u-v,\ v<u \ (\text{para a esquerda}) \end{cases}}$$

Desse modo, assumindo v < u, podemos considerar o esquema a seguir, onde as velocidades são representadas em relação ao vento.

Portanto,

$$f_{tio} = f_0\left(\frac{s - \left|\vec{v}_{tio/vento}\right|}{s - \left|\vec{v}_{Ana/vento}\right|}\right) \rightarrow \boxed{f_{tio} = f_0\left(\frac{s-u}{s-v+u}\right)}$$

$$f_{Ana} = f_0\left(\frac{s + \left|\vec{v}_{Ana/vento}\right|}{s + \left|\vec{v}_{Ana/vento}\right|}\right) \rightarrow \boxed{f_{Ana} = f_0}$$

OSG.: 7175/11 Pat/ Rev.: Vânia