

PROFESSORES:

Daniel Paixão, Deric Simão, Edney Melo, Ivan Peixoto, Leonardo Bruno, Rodrigo Lins e Rômulo Mendes

COORDENADOR DE ÁREA:

Prof. Edney Melo



1. Um foguete de 1000 kg é lançado da superfície da Terra a partir do repouso e numa trajetória vertical ascendente. Nos primeiros 60 segundos da subida a altura h (a partir da superfície) do foguete foi determinada em km em intervalos de 5 segundos e o resultado indicado na tabela a seguir:

h(km)	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	36
t(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

- Escreva a equação horária $h(t)$ para o foguete.
- Determine a força de empuxo ascendente que atua no foguete.

COMENTÁRIO:

- Condições iniciais do problema:
 $h(0) = h_0 = 0 \rightarrow$ posição em $t = 0$
 $v(0) = v_0 = 0 \rightarrow$ o foguete parte do repouso.
 - Observando a tabela fornecida, note que:
 - À medida que o tempo DOBRA, a distância percorrida QUADRUPLICA.
 - À medida que o tempo TRIPLICA, a distância percorrida NONUPLICA.
 - Conclui-se então que se trata de um movimento retilíneo uniformemente variado, de modo que:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

$$h = \frac{at^2}{2}$$

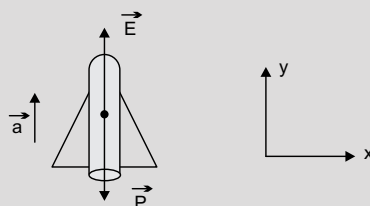
- Para determinar a aceleração, escolhemos uma posição e um instante correspondente. Ou seja, para $h = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ e $t = 10\text{s}$, temos que:

$$1000 = \frac{100 \cdot a}{2} \rightarrow a = 20 \text{ m/s}^2$$

- Logo, a equação horária será dada por:

$$h(t) = \frac{20 \cdot t^2}{2} \rightarrow \boxed{h(t) = 10 \cdot t^2}$$

- Analisando as forças atuantes no foguete, temos que:



Aplicando a 2ª Lei de Newton ao foguete, temos que:

$$F_R = m \cdot a$$

$$E - P = m \cdot a$$

$$E - mg = m \cdot a$$

$$E = m \cdot a + mg$$

$$E = m \cdot (a + g)$$

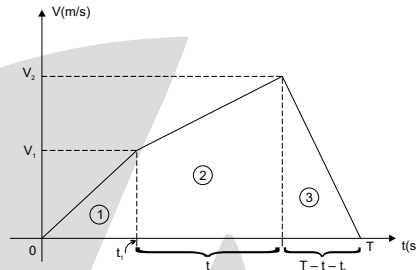
$$E = 1000 \cdot (20 + 10)$$

$$\boxed{E = 30\,000\text{N}}$$

2. Um móvel se desloca ao longo de uma reta. No primeiro trecho da viagem ele parte do repouso com uma aceleração constante a_1 e atinge uma velocidade máxima v_1 . No segundo trecho, de duração t , ele possui uma aceleração constante e menor a_2 e atinge uma velocidade máxima v_2 . No terceiro trecho ele desacelera com aceleração $-a_3$ até atingir o repouso novamente. Sabendo que o tempo total da viagem foi T , determine qual a distância total percorrida pelo móvel.

COMENTÁRIO:

- De acordo com o enunciado do problema, podemos construir um gráfico associado aos trechos do movimento em questão.



- Analisando o primeiro trecho, temos que:

$$v_1 = v_0 + a_1 \cdot t_1$$

$$v_1 = a_1 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a_1}$$

- A distância percorrida é numericamente igual à área sob o gráfico. Analisemos para cada trecho:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot \frac{v_1}{a_1} \rightarrow A_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot a_1}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \cdot t = \frac{v_1 \cdot t}{2} + \frac{v_2 \cdot t}{2}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot (T - t - t_1) = \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot \left(T - t - \frac{v_1}{a_1} \right)$$

$$A_3 = \frac{v_2 \cdot T}{2} - \frac{v_2 \cdot t}{2} - \frac{v_1 \cdot v_2}{2 \cdot a_1}$$

Desse modo, temos que:

$$D \stackrel{N}{=} A_1 + A_2 + A_3$$

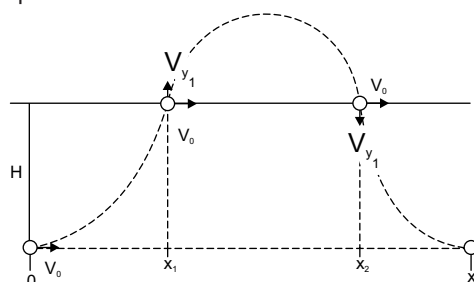
$$D = \frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} + \frac{v_1 \cdot t}{2} + \frac{v_2 \cdot t}{2} + \frac{v_2 \cdot T}{2} - \frac{v_2 \cdot t}{2} - \frac{v_1 \cdot v_2}{2 \cdot a_1}$$

$$D = \frac{v_1}{2 \cdot a_1} (v_1 - v_2) + \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot t + v_2 \cdot T)$$

3. Um corpo é lançado do fundo de um lago com velocidade horizontal v_0 . O lago, de profundidade H , possui água de densidade ρ_L . Sabendo que a densidade da água é maior que a densidade ρ_C do corpo, determine qual deve ser a razão entre as duas para que o alcance total do corpo, medido na linha horizontal de lançamento do mesmo, seja mínimo.

COMENTÁRIO:

Do enunciado do problema, temos que:



I. Primeiro trecho (dentro do lago): $0 \rightarrow x_1$

$$F_R = m \cdot a = E - \rho = \rho_L \cdot v \cdot g - \rho_C \cdot v \cdot g$$

$$a = \frac{(\rho_L - \rho_C) \cdot v \cdot g}{m} = \frac{(\rho_L - \rho_C) \cdot \cancel{v} \cdot g}{\rho_C \cdot \cancel{v}} = \left(\frac{\rho_L - \rho_C}{\rho_C} \right) \cdot g$$

Podemos perceber que a aceleração será constante, logo:

$$v_{y1}^2 = 0^2 + 2 a H \Rightarrow v_{y1} = \sqrt{2 a H}$$

Agora, encontremos $A_1 = x_1 - 0$:

$$v_{y1} = 0 + a \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y1}}{a}$$

$$\Rightarrow A_1 = v_0 \cdot t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

II. Segundo trecho (no ar): $x_1 \rightarrow x_2$

Temos um lançamento oblíquo cujo tempo total é t_2 , $v_{y\text{final}} = 0 = v_{y1} - g \frac{t_2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{2v_{y1}}{g}$.

Portanto, $A_2 = x_2 - x_1 = v_0 \cdot t_2$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{v_0 \cdot 2\sqrt{2aH}}{g}$$

III. Terceiro trecho (dentro do lago novamente): $x_2 \rightarrow x_3$

Nesse trecho a aceleração será a mesma do primeiro trecho. Como a velocidade inicial desse trecho tem módulo igual ao final do trecho 1, o tempo para alcançar o fundo será o mesmo gasto no primeiro trecho:

$$v_{fy} = 0 = v_{y1} - at_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v_{y1}}{a} = \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

$$\text{logo, } A_3 = x_3 - x_2 = A_1 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

Por fim, $A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + A_3$

$$\Rightarrow A_{\text{total}} = 2v_0 \sqrt{\frac{2H}{a}} + \frac{2v_0 \sqrt{2aH}}{g}$$

$$A_{\text{total}} = \underbrace{2v_0 \sqrt{2H}}_{\text{constante}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{g} \right)}_Z$$

Assim, podemos perceber que o alcance dependerá da expressão Z. Para um alcance mínimo temos que ter um $Z_{\text{mínimo}}$.

Sabemos que:

$$M.A \geq M.G \dots \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{em que } \begin{cases} M.A - \text{m\u00e9dia aritm\u00e9tica} \\ M.G - \text{m\u00e9dia geom\u00e9trica} \end{cases}$$

e que a igualdade ocorre quando $x = y$.

Fazendo $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ e $y = \frac{\sqrt{a}}{g}$, temos:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{g} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{g}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \Rightarrow Z \geq \frac{2}{\sqrt{g}}$$

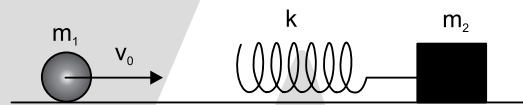
Logo, para um alcance mínimo:

$$x = y \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{g} \Rightarrow a = g$$

Só que, $a = \left(\frac{\rho_L}{\rho_C} - 1 \right) \cdot g$

$$\Rightarrow \frac{\rho_L}{\rho_C} - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\rho_L}{\rho_C} = 2}$$

4. Uma massa m_1 , com velocidade inicial v_0 , atinge um sistema massa-mola, cuja massa é m_2 , inicialmente em repouso, mas livre para se movimentar. A mola é ideal e possui constante elástica k , conforme a figura. Não há atrito com o solo.



- a) Qual é a compressão máxima da mola?
 b) Se, após um longo tempo, ambos os objetos, se deslocam na mesma direção, quais serão as velocidades finais v_1 e v_2 das massas m_1 e m_2 , respectivamente?

COMENTÁRIO:

- a) Note que, como não há atritos, o bloco de massa m_2 também se movimenta, de modo que a compressão máxima da mola ocorrerá quando as duas massas possuírem uma mesma velocidade v . Pela conservação da quantidade de movimento do sistema, temos que:

$$Q_i = Q_f$$

$$m_1 \cdot v_0 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_0$$

Como se trata de um sistema livre de atritos, podemos conservar a energia mecânica do sistema. Desse modo, temos que:

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot v_0^2 + \frac{kx^2}{2}$$

$$m_1 v_0^2 = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \cdot v_0^2 + kx^2$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(\frac{m_1^2 + m_1 \cdot m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$kx^2 = v_0^2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\boxed{x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{k \cdot (m_1 + m_2)}}}$$

b) Para um caso geral de colisões elásticas em uma dimensão, temos que:

- Conservação da quantidade de movimento.

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f}$$

$$m_1 \cdot (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 \cdot (v_{2i} - v_{2f}) \quad (I)$$

- Conservação da energia mecânica:

$$\frac{m_1 \cdot v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2f}^2}{2}$$

$$m_1 \cdot (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2 \cdot (v_{2i}^2 - v_{2f}^2)$$

$$m_1 \cdot (v_{1i} + v_{1f}) \cdot (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 \cdot (v_{2i} + v_{2f}) \cdot (v_{2i} - v_{2f}) \quad (II)$$

- Dividindo (II) por (I), temos que:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \quad (III)$$

- Da equação (I), temos que:

$$v_{1i} - v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} \cdot (v_{2i} - v_{2f}) \quad (IV)$$

- Através de um sistema de equações entre (III) e (IV), temos que:

$$\begin{cases} v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \\ v_{1i} - v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} (v_{2i} - v_{2f}) \end{cases}$$

$$2 \cdot v_{1i} = v_{2i} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) + v_{2f} \cdot \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$2 \cdot v_{1i} = v_{2i} \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right) + v_{2f} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

$$v_{2f} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) = 2 \cdot v_{1i} - v_{2i} \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i} \quad (V)$$

- Da equação (III), temos que:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

$$v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i}$$

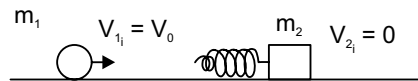
$$v_{1f} = v_{2i} + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i} - v_{1i}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) \cdot v_{1i} + \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{2m_1 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1i} + \left(\frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot v_{2i} \quad (VI)$$

- Para a situação apresentada no problema, temos que:



- Da equação (VI), temos que:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{2i}$$

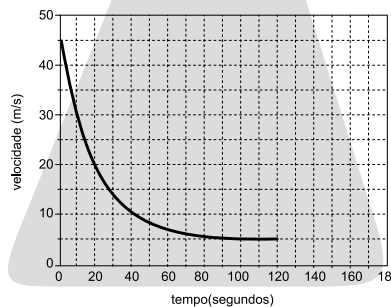
$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_0$$

- Da equação (V), temos que:

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0$$

5. Um paraquedista de 80 kg, em queda livre, leva 3 minutos, após a abertura (início da contagem do tempo $t = 0$) do paraquedas, para atingir o solo de uma altura de 1700m. O gráfico a seguir representa a velocidade do paraquedista nos primeiros dois minutos após a abertura do paraquedas.

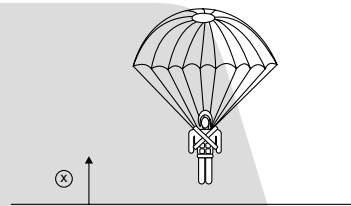


- Qual a aceleração média sofrida pelo paraquedista durante a queda?
- Calcule a energia mecânica perdida devido ao atrito com o ar durante a queda.

COMENTÁRIO:

Dados:

$m = 80 \text{ kg}$
 $\Delta t = 3 \text{ min} = 180 \text{ s}$
 $H = 1700 \text{ m}$



- Veja pelo gráfico que a velocidade do paraquedista tende a $v_f = 5 \text{ m/s}$ ao fim de 180 s temos para o início da contagem do tempo $v_i = -45 \text{ m/s}$ e $v_f = -5 \text{ m/s}$. Logo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-5 - (-45)}{180} = \frac{-40}{180} = \frac{-2}{9} \text{ m/s}^2$$

- A diferença entre a energia mecânica inicial e final é a energia mecânica perdida devido ao atrito, daí:

$$E_{\text{perdida}} = E_{m_i} - E_{m_f}$$

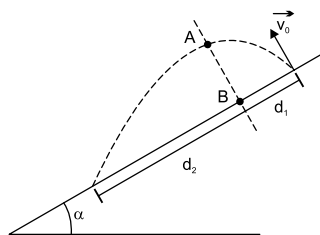
$$E_{m_i} = \frac{1}{2} m v_i^2 + mgh = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 45^2 + 80 \cdot 10 \cdot 1700 = 1441 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$E_{m_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 5^2 = 10^3 \text{ J}$$

Daí

$$E_P = E_{m_i} - E_{m_f} = 1440 \text{ J}$$

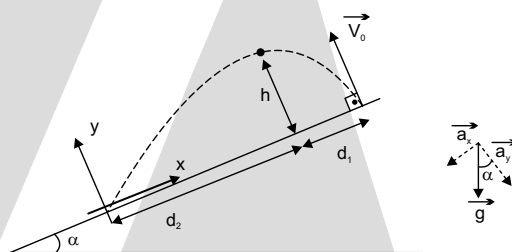
6. Uma partícula é lançada com velocidade v_0 perpendicularmente a um plano inclinado, de inclinação α com a horizontal, como mostra a figura. Determine:



- A distância máxima \overline{AB} que a partícula fica do plano inclinado.
- O alcance da partícula ao longo do plano inclinado.
- A razão entre d_1 e d_2 mostrada na figura. Obs.: Sendo A o ponto cuja partícula está à distância máxima do plano e B sua projeção sobre o mesmo, as distâncias d_1 e d_2 são definidas como a distância do ponto de lançamento a B, e a distância de B ao ponto de retorno da partícula ao plano, respectivamente.

COMENTÁRIO:

Considere o sistema de coordenadas representado na figura abaixo, em que a origem encontra-se no ponto onde a partícula colide com o plano inclinado.



Desse modo, o movimento pode ser descrito como a composição de dois MRUVs, em que são válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = (d_1 + d_2) - \frac{a_x t^2}{2} \rightarrow x = (d_1 + d_2) - \frac{g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2}{2} & \text{(I)} \\ y = v_0 t - \frac{a_y t^2}{2} \rightarrow y = v_0 t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Podemos ainda descrever o comportamento da velocidade em função do tempo.

$$\begin{cases} v_x = -a_x \cdot t \rightarrow v_x = -g \operatorname{sen} \alpha \cdot t & \text{(III)} \\ v_y = v_0 - a_y \cdot t \rightarrow v_y = v_0 - g \cos \alpha \cdot t & \text{(IV)} \end{cases}$$

Quando a partícula encontra-se à distância máxima do plano inclinado, podemos afirmar que $v_y = 0$, o que ocorre em $t = \frac{v_0}{g \cos \alpha}$, verificado a partir da equação (IV). De acordo com a equação (II), a distância máxima \overline{AB} será dada por:

$$y = v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g \cos \alpha} \right) - \frac{g \cos \alpha}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g \cos \alpha} \right)^2$$

$$y = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} - \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha}$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha}$$

O alcance da partícula ao longo do plano inclinado é determinado fazendo-se $x = 0$ e $y = 0$. Assim, a partir das equações (I) e (II), temos que:



$$\begin{cases} 0 = (d_1 + d_2) - \frac{g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2}{2} & \rightarrow (d_1 + d_2) = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2} \cdot t^2 \\ 0 = v_0 t - \frac{g \operatorname{cos} \alpha \cdot t^2}{2} & \rightarrow t = \frac{2v_0}{g \operatorname{cos} \alpha} \end{cases}$$

Portanto,

$$(d_1 + d_2) = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2} \cdot \left(\frac{2v_0}{g \operatorname{cos} \alpha} \right)^2$$

$$\boxed{(d_1 + d_2) = \frac{2v_0^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g \operatorname{cos}^2 \alpha}}$$

Sabe-se que o tempo necessário para que a partícula atinja o ponto A é dado por $t = \frac{v_0}{g \operatorname{cos} \alpha}$. Substituindo este resultado na equação (I), temos que:

$$d_1 = (d_1 + d_2) - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g \operatorname{cos} \alpha} \right)^2$$

$$d_2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

A partir do resultado obtido no item (B), podemos concluir que:

$$d_1 + \left(\frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g \operatorname{cos}^2 \alpha} \right) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{g \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$d_1 = \frac{3v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

Portanto,

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{3v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g \operatorname{cos}^2 \alpha}}{\frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha}{2g \operatorname{cos}^2 \alpha}}$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = 3}$$

7. Neste problema você será apresentado a um método desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Leibnitz independentemente. Nele, você irá aprender a derivar a velocidade de um corpo em movimento tendo conhecimento apenas da sua função horária da posição.

Considere um móvel cuja equação horária é $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$, onde $x(t)$ é dado em metros e t em segundos.

- a) Qual a posição do móvel nos instantes $t_0 = 0s$, $t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$.

Sabendo que a velocidade média de um móvel entre os instantes t e $t + \Delta t$ é dada por: $v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

- b) Determine a velocidade média do móvel nos intervalos (t_0, t_1) , (t_1, t_2) e (t_0, t_2) .

Agora, vamos aprender a determinar a velocidade instantânea de um móvel num instante dado. Para calcular a velocidade do móvel no instante $t_1 = 1s$, proceda da seguinte maneira:

- c) Determine o valor da velocidade média do móvel entre t_1 e $t_1 + \Delta t$, em função de Δt .
d) A velocidade do móvel é obtida fazendo-se $\Delta t = 0$ na expressão obtida no item anterior. Determine essa velocidade.
e) Repita o mesmo procedimento dos itens (c) e (d) para determinar o valor da velocidade em qualquer instante de tempo t .

COMENTÁRIO:

a) $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$

Substituindo os valores

$$x(t_0) = x(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ m}$$

$$x(t_1) = x(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2 \text{ m}$$

$$x(t_2) = x(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9 \text{ m}$$

b) Usando a definição de velocidade média $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

$$v_m = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{2}{1} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{7}{1} = 7 \text{ m/s}$$

c) $x(t_1) = 3 \cdot t_1^2 - 2t_1 + 1$

$$x(t_1 + \Delta t) = 3 \cdot (t_1 + \Delta t)^2 - 2(t_1 + \Delta t) + 1$$

$$= 3 \cdot t_1^2 + 6 \cdot t_1 \Delta t + 3\Delta t^2 - 2t_1 - 2\Delta t + 1$$

$$v_m = \frac{3 \cdot t_1^2 + 6 \cdot t_1 \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2 - 2t_1 - 2\Delta t + 1 - 3t_1^2 + 2t_1 - 1}{\Delta t}$$

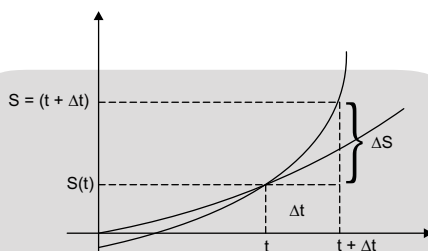
$$v_m = \frac{6 \cdot t_1 \cdot \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6 \cdot t_1 + 3 \cdot \Delta t - 2$$

d) Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ a expressão de v_m se torna $v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = 6 \cdot t_1 - 2$.

e) Podemos utilizar a expressão do item (c) substituindo t_1 por t , temos que: $v_m = 6t + 3 \cdot \Delta t - 2$. Essa expressão nos dá a velocidade média entre dois instantes de tempo genéricos t e $t + \Delta t$, de modo que quando fazemos $\Delta t \rightarrow 0$ teremos a velocidade no instante t genérico. Vejamos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = 6t - 2$$

Graficamente teremos:



$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ a medida que $\Delta t \rightarrow 0$ a curva se aproxima de uma reta, cujo comportamento é o de uma taxa constante de variação, daí quando $\Delta t \rightarrow 0$, v_m tende a um valor fixo, que é interpretado como a taxa de variação instantânea da posição pelo tempo ou velocidade instantânea.

8. Segundo a teoria da Relatividade de Einstein, um elétron relativístico tem uma massa de repouso m_0 e uma massa inercial m representada pela seguinte equação:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde v é a velocidade do elétron relativa a um referencial inercial e c a velocidade da luz no vácuo. Esta equação implica que o elétron em movimento tem uma massa que depende da sua velocidade!

a) Qual a massa inercial do elétron quando $v = 0,5c$.

b) Por que um elétron não pode viajar a velocidade da luz segundo a teoria de Einstein? Sua resposta deve ser baseada na interpretação da equação anterior.



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a) Substituindo $v = 0,5c$ na expressão acima: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{0,5^2 \cdot c^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0,25}} \approx 1,15 m_0$.

b) De acordo com a expressão, a medida que v se aproxima de c , m cresce infinitamente, daí seria necessário uma energia infinita para acelerar o elétron.