Módulo 1

MATRIZES
(PÁGINAS 3 E 4)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Temos A = (a_{ij}) 3 x 3, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j \text{ se } i < j \rightarrow a_{12}, a_{13}, a_{23} \\ i^j \text{ se } i = j \rightarrow a_{11}, a_{22}, a_{33} \\ 2i \text{ se } i > j \rightarrow a_{31}, a_{32}, a_{21} \end{cases}$$

Logo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 27 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos vale: 52

Resposta correta: 52

2. Queremos encontrar o valor de $a_{13} + a_{21}$.

I. $i \geq j$
$a_{ij} = 2^i$
$a_{21} = 2^2$
$a_{21} = 4$

II. $i < j$
$a_{ij} = \log i$
$a_{13} = \log 1$
$a_{13} = 0$

Portanto:
$a_{13} + a_{21} = 0 + 4 = 4$

Resposta correta: B

3. a) A quantidade corresponde a j = 3 e i = 2 ⇒ $a_{23} = 3$ unidades.

b) $5a_{11} + 4a_{21} + 2a_{31}$
5 . 5 +4 . 0 + 2 . 4
33 unidades

4. Os elementos da diagonal principal são a_{11}, a_{22} e a_{33}.

I. $f(x) = \dfrac{5 - \log x}{4}$

$f(1) = \dfrac{5 - \log 1}{4}$

$f(2) = \dfrac{5 - \log 2}{4}$

$f(3) = \dfrac{5 - \log 3}{4}$

II. $g(x) = \dfrac{3 - \log x}{4}$

$g(1) = \dfrac{3 - \log 1}{4}$

$g(2) = \dfrac{3 - \log 2}{4}$

$g(3) = \dfrac{3 - \log 3}{4}$

III. $a_{11} = f(1) - g(1) = \dfrac{5 - \log 1}{4} - \left(\dfrac{3 - \log 1}{4}\right) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$a_{22} = f(2) - g(2) = \dfrac{5 - \log 2}{4} - \left(\dfrac{3 - \log 2}{4}\right) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$a_{33} = f(3) - g(3) = \dfrac{5 - \log 3}{4} - \left(\dfrac{3 - \log 3}{4}\right) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Desta maneira:

$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Resposta correta: C

5. Na matriz antissimétrica, a diagonal principal é nula:

4 + a = 0	b + 2 = 0	2c – 8 = 0
a = – 4	b = –2	2c = 8
		c = 4

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -4 & 0 & a_{23} \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:
$a_{12} = 4$, $a_{13} = 2$ e $a_{23} = -4$

Resposta correta: D

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Se $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i \neq j \\ 2i - 3j, \text{ se } i = j \end{cases}$ e $A_{2\times 3}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, então:

$a_{11} = 2 . 1 - 3 . 1 = -1$
$a_{12} = 3 . 1 + 2 = 5$
$a_{13} = 3 . 1 + 3 = 6$

$a_{21} = 3 . 2 + 1 = 7$
$a_{22} = 2 . 2 - 3 . 2 = -2$
$a_{23} = 3 . 2 + 3 = 9$

Assim, a matriz A é $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

Resposta correta: D

2. Encontrando as distâncias entre os vértices, teremos os elementos da matriz:

$a_{11} = 0$	$a_{21} = 1$	$a_{13} = 1$
$a_{22} = 0$	$a_{23} = 1$	$a_{31} = 1$
$a_{33} = 0$	$a_{12} = 1$	$a_{32} = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta correta: B

3. Observe que o início de cada linha é igual à sua ordem. Na linha 28 de cada elemento é igual a (28 + nº coluna – 1).

	1ª Col.	2ª Col.	3ª Col.			17ª Col.
1ª Linha	1	2	3	4	...	
2ª Linha	2	3	4	5	...	
3ª Linha	3	4	5	6	...	
4ª Linha	4	5	6	7	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
28ª Linha	28	29	30	31		28+17–1 = 44

Resposta correta: A

4. $A = A^t$

$$\begin{pmatrix} 3 & x^2 & x-2 \\ 4 & -2 & x+2y \\ 2x & x+y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2x \\ x^2 & -2 & x+y \\ x-2 & x+2y & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos:

I) $2x = x - 2$
$x = -2$

II) $\cancel{x} + y = \cancel{x} + 2y$
$y = 0$

Portanto: $2x + y = 2(-2) + 0 = -4$

Resposta correta: E

5. Como A é antissimétrica, a diagonal principal é nula:
$x - 2 = 0 \quad y - 5 = 0 \quad z - 4 = 0$
$x = 2 \quad y = 5 \quad y = 0$

Sabendo que $A = -A^t$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -3 \\ 5 & 0 & c \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -b \\ a & 0 & 2 \\ 3 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos:
$b = 3 \quad a = -5 \quad c = 2$

Sendo assim:
$(x + y + z)^{a+b+c} = (2 + 5 + 4)^{-5+3+2} = 11^0 = 1$

Resposta correta: B

6. Os elementos abaixo da diagonal secundária obedecem à relação i. j > (i + j), sendo iguais a zero. Enquanto o restante dos elementos não obedecem e são iguais a 1. Por exemplo, vamos observar uma matriz de ordem 3.

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3>2+3 3.3>3+3 3.2>3+2 3 elementos

Observe que a matriz de ordem 3 tem 3 elementos acima da diagonal secundária, 3 elementos abaixo da diagonal secundária e 3 elementos nessa diagonal.
Uma matriz de ordem **n** possui **n** elementos iguais a 1 acima da diagonal secundária, **n** elementos iguais a 1 na diagonal principal e n elementos iguais a 0 abaixo da diagonal secundária.
Soma dos elementos: n. 1 + n. 1 + n. 0 = 2n

Resposta correta: A

7. Se a matriz é 3 x 3, então os elementos da diagonal principal são: a_{11}, a_{22}, a_{33}. Como $a_{ij} = i^j$, temos:
$a_{11} = 1^1 = 1$
$a_{22} = 2^2 = 4$
$a_{33} = 3^3 = 9$

Assim, o traço é $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 4 + 27 = 32 = 2^5$

Resposta correta: B

8. a) Dividindo-se o número por 3, o resto da divisão indica a ordem da linha:

$$\begin{array}{r|l} 319 & 3 \\ \hline 019 & 106 \\ 18 & \\ (1) & \end{array}$$

Linha em que o 1 se encontra ⇒ $\boxed{\text{linha 2}}$

b) Para encontrarmos a coluna, basta encontrarmos a posição do termo 319 na PA:
(1, 4, 7, ..., 319, ...)
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$319 = 1 + (n - 1)\,3$
$319 = 1 + 3n - 3$
$3n = 321$
$\boxed{n = 107^a \text{ coluna}}$.

9. Atribuindo valores a **i** e **j**:

$a_{11} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}.1\right) = 1 \qquad a_{12} = \cos(\pi.2) = 1$

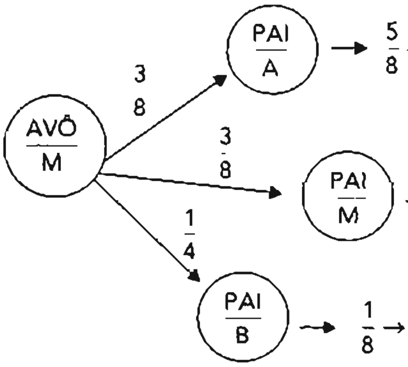
$a_{21} = \cos(\pi.1) = -1 \qquad a_{22} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}.2\right) = 0$

Desta maneira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta correta: B

10. Temos graficamente:



$\frac{5}{8} \to P_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

$\frac{3}{8} \to P_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

$\frac{1}{8} \to P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{64}$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}$$

Resposta correta: A

(PÁGINAS 7 E 8)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Considere o sistema $\begin{cases} x + \cancel{y} = 3 \,.\, A \\ x - \cancel{y} = 2 \,.\, B \end{cases}$ +
$2x = 3A + 2B$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e considere $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Assim temos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Desta igualdade, temos:

$$\left.\begin{array}{l}2a = 8 \rightarrow a = 4\\ 2b = 10 \rightarrow b = 5\\ 2c = 6 \rightarrow c = 3\\ 2d = 12 \rightarrow d = 6\end{array}\right\} x = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

$x + y = 3A \rightarrow \begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i & f\\ g & h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$. Como queremos a soma dos elementos da diagonal principal da matriz y, então:

$$\left.\begin{array}{l}4 + e = 6 \rightarrow e = 2\\ 6 + h = 12 \rightarrow h = 6\end{array}\right\rangle e + h = 8$$

Resposta correta: C

2. Das tabelas podemos tirar:

Preço Bom:
Gevalda: $10 . 2 + 5 . 3 + 6 . 4 = 20 + 15 + 24 = 59$
Jurema: $12 . 2 + 4 . 3 + 2 . 4 = 24 + 12 + 8 = 44$
Toinha: $5 . 2 + 7 . 3 + 6 . 4 = 10 + 21 + 24 = 55$

Baratim:
Gevalda: $10 . 4 + 5 . 2 + 6 . 3 = 40 + 10 + 18 = 68$
Jurema: $12 . 4 + 4 . 2 + 2 . 3 = 24 + 8 + 6 = 38$
Toinha: $5 . 4 + 7 . 2 + 6 . 3 = 20 + 14 + 18 = 52$

Resposta correta: D

3. Considere as matrizes:

$$A\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{pmatrix}_{4\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix}b_{11} & \boxed{b_{12}} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & b_{33} & b_{34}\end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$C = A . B$, como queremos C_{22}, então temos que desenvolver o produto das filas em destaque:
$a_{21} . b_{12} + a_{22} . b_{22} + a_{23} . b_{32}$

Como $a_{ij} = i^j$ e $b_{ij} = j^i$, temos:
$a_{21} = 2^1 = 2$; $a_{22} = 2^2 = 4$; $a_{23} = 2^3 = 8$
$b_{12} = 2^1 = 2$; $b_{22} = 2^2 = 4$; $b_{32} = 2^3 = 8$

Assim o $C_{22} = 2 . 2 + 4 . 4 + 8 . 8 \rightarrow$
$\rightarrow C_{22} = 4 + 16 + 64 \rightarrow C_{22} = 84$

Resposta correta: D

4. Encontrando as potências de **x**:

$$x^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$x^3 = x^2 . x = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Observe que todos os elementos são iguais, exceto os a_{12} que formam uma PA de razão 2:

$$x^{21} = \begin{pmatrix}1 & a_{21}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad x^{21} = \begin{pmatrix}1 & 42\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$a_{21} = a_1 + 20r$
$a_{21} = 2 + 20 . 2$
$a_{21} = 42$

A matriz M é a soma das potências de **x**

$M = x^1 + x^2 + ... + x^{21} =$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix}1 & 42\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix}21 & 2 + 4 + 6 + ... + 42\\ 0 & 21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21 & \dfrac{(2 + 42)21}{2}\\ 0 & 21\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}21 & 462\\ 0 & 21\end{pmatrix}$$

Sendo assim:

$$\frac{\Delta}{8} = \frac{21 + 21 + 462}{8} = 63$$

Resposta correta: 63

5. Temos $M^2 = M - I$. Multiplicando por M e, como $MI = M$, temos:
$M^2 = M - I$
$M^3 = M^2 - M = M - I - M = -I$
$M^4 = M^3 . M = -I . M = -M$
$M^5 = M^4 . M = -M . M = -M^2 = I - M$
$M^6 = M^5 . M = M - M^2 = M - M + I = I$
$M^7 = M^6 . M = I . M = M$
$M^8 = M^7 . M = M^2 = M - I$

A partir de 2, o valor M^n se repete de 6 em 6. Logo $M^{6k+n} = M^n$, $n \geq 2$. Como $2003 = 6 . 333 + 5 \Rightarrow M^{6 . 333 + 5} = M^5 = I - M$.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Resolvendo a equação:

$$A . B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ y & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5x + 3y & 3x + 3\\ 10 - 5y & 6 - 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualando os elementos:

$10 - 5y = 0$	$3x + 3 = 0$
$5y = 10$	$3x = -3$
$y = 2$	$x = -1$

Portanto:
$x^2 + y^2 + 1 = (-1)^2 + 2^2 + 1 = 6$

Resposta correta: C

2. Estudando as ordens em relação às *operações:*
$A_{3\times\cancel{4}} . B_{\cancel{4}\times 2} + X = C^t$
$(AB)_{3\times 2} + X = C^t$
$X = C^t - (AB)_{3\times 2}$

Só existirá solução se C' e AB tiverem mesma ordem:
$C'_{3x2} \Rightarrow C_{2x3}$

Resposta correta: A

3. a) (F) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$
$= A^2 + AB + BA + B^2$, se $AB = BA$
$= A^2 + AB + AB + B^2$
$= A^2 + 2AB + B^2$
A propriedade só será válida se AB = BA, o que ele não afirma.
b) (F) Pelo mesmo motivo do item anterior.
c) (F) Não é necessário A ou B ser nula, por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) (V) Propriedade do produto.

Resposta correta: D

4. $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comutam.

Logo: $AB = \begin{pmatrix} 2x+2 & x+2 \\ 2y+2 & y+2 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 2x+y & 6 \\ x+y & 4 \end{pmatrix}$

Temos: $\begin{cases} x+2=6 \rightarrow x=4 \\ y+2=4 \rightarrow y=2 \end{cases}$

Portanto, $\log_y x = \log_2 4 = 2 \rightarrow \log_y x = 2$.

Resposta correta: C

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ e $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

Temos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & a & \theta \\ y & b & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix}$

Queremos x + y: $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+6y=12 \\ 3x+3y=11 \end{cases}$.

Subtraindo:
y = 1 e x = 2. Logo, x + y = 3.

Resposta correta: C

6. Efetuando o produto:

$$2.A.A = 2\begin{pmatrix} \cos 15° & -\text{sen}15° \\ \text{sen}15° & \cos 15° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 15° & -\text{sen}15° \\ \text{sen}15° & \cos 15° \end{pmatrix}$$

$$2.A.A = 2\begin{pmatrix} \cos^2 15° - \text{sen}^2 15° & -\text{sen}15° - \text{sen}15° \cos 15° \\ \text{sen}15° \cos 15° + \text{sen}15° \cos 15° & \cos^2 15° - \text{sen}^2 15° \end{pmatrix}$$

Como $\cos^2 15 - \text{sen}^2 15° = \cos(2 \,.\, 15°)$, então:

$$2.A.A = 2\begin{pmatrix} \cos(2 \,.\, 15°) & -2\text{sen}15° \cos 15° \\ 2\text{sen}15° \cos 15° & \cos(2.15°) \end{pmatrix}$$

Como $2 \text{ sen } 15 \,.\, \cos 15° = \text{sen}(2 \,.\, 15°)$, então:

$$2.A.A = 2\begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen}30° \\ \text{sen}30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\sqrt{3}/2 & 2.-1/2 \\ 2.\sqrt{1}/2 & 2.\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$2.A.A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Resposta correta: A

7. Calculando as potências de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \,.\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$A + A^2 + A^3 + ... + A^n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & 1+2+3+...+n \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

Resposta correta: D

8. Efetuando:
$C = A^2 - B^2 - (A + B)(A - B)$
$C = A^2 - B^2 - A^2 + AB - BA + B^2$
$C = AB - BA$

$$C = \begin{pmatrix} 19941994 & 19941994 \\ 19941994 & 19941995 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19941994 & 19941994 \\ 19941994 & 19941995 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta correta: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Logo, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Daí: $A^4 = A^3 . A = A \rightarrow A^5 = A^2$.
Portanto: $A^{3k+n} = A^n$
Pelas opções $A^{24} = A^{3k+3} = A^3 = I_2 \rightarrow A^{24} = I$.

Resposta correta: A

10. $\alpha = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha & -\text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos\alpha & -\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\text{sen}2\alpha \\ \text{sen}2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\text{sen}2\alpha \\ \text{sen}2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Logo: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \cos 4\alpha & -\text{sen}4\alpha \\ \text{sen}4\alpha & \cos 4\alpha \end{pmatrix}$

Daí:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} \cos 4\alpha & -\text{sen}4\alpha \\ \text{sen}4\alpha & \cos 4\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 4\alpha\cos\alpha - \text{sen}4\alpha\text{sen}\alpha & -\cos 4\alpha\text{sen}\alpha - \text{sen}4\alpha\cos\alpha \\ \text{sen}4\alpha\cos\alpha + \cos 4\alpha\text{sen}\alpha & -\text{sen}4\alpha\text{sen}\alpha + \cos 4\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 5\alpha & -\text{sen}5\alpha \\ \text{sen}5\alpha & \cos 5\alpha \end{pmatrix}$$

Daí: $\begin{cases} \cos 5\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150° \rightarrow \alpha = 30 \\ \text{sen}5\alpha = -\frac{1}{2} = \text{sen}150° \rightarrow \alpha = 30 \end{cases}$.

Logo, $\text{tg}\alpha = \text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Resposta correta: B

(PÁGINAS 9 E 10)

ATIVIDADES PARA SALA

1. a) $A . X = B$
$X = A^{-1}. B$

b) $X . A = B$
$X = B . A^{-1}$

c) $A . X . B = C$
$X . B = A^{-1} . C$
$X = A^{-1}. C . B^{-1}$

d) $(A . X)^{-1} = BC \times (AX)$
$(AX) . (AX)^{-1} = (AX)BC$
$I = A X B C$
$I . X^{-1} = A B C$
$(X^{-1})^{-1} = (A . B . C)^{-1}$
$X = (ABC)^{-1}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \log_y^4 \\ 5 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x - 5 & 2\log_y^4 - y^2 \\ \frac{-5x}{2} + \frac{15}{2} & \frac{-5\log_y^4}{2} + \frac{3y^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. $2x - 5 = 1$
$2x = 6$
$x = 3$

II. $2\log_y^4 - y^2 = 0$
$\log_y^{4^2} = y^2$
$y^{y^2} = 4^2$
$y^{y^2} = 2^{2^2}$
$y = 2$

III. $x + y = 5$

3. Calculando a inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{0}{-1} & \frac{-1}{-1} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa de B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/6 & -1/6 \\ 0/6 & 2/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Portanto:
$A + BX = A^{-1}$
$BX = A^{-1}$
$X = B^{-1}(A^{-1} - A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{21} de $X = 0$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -2$

Calculando todos os cofatores:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

Montando a matriz dos cofatores:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculando a matriz adjunta:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -8 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{M} = \begin{pmatrix} 0/-2 & -2/2 & 0/-2 \\ -1/-2 & -8/-2 & 3/-2 \\ 0/-2 & 6/-2 & -2/-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4 & -3/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{Soma} = 1 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 + 1 + 4 = \boxed{2}$$

Resposta correta: B

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

I. $A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

II. $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^t + A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+1 & 1+0 \\ 0+2 & 3+1 & 3+0 \\ 0+1 & 3+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Resposta correta: E

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Temos $M = A^{-1}$, mas $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow A \cdot M = I$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix} \rightarrow A.M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix} =$

Lembrete: Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow x = 3$ e $y = \frac{1}{2} \rightarrow x \cdot y = \frac{3}{2}$

Resposta correta: A

2. Encontrando os elementos de A:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_{21} = 0$

$a_{12} = 0$ $\qquad$ $a_{22} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Montando a matriz A:

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \frac{1}{8}$

Encontrando a inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} & \dfrac{0}{\frac{1}{8}} \\ \dfrac{-0}{\frac{1}{8}} & \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Resposta correta: C

3. Encontrando a inversa de B:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 6$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-0}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A matriz X será:
$X = (A.\ B^{-1})^t$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]^t$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^t$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Resposta correta: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

4. Encontrando a inversa de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{0}{-1} & \frac{-1}{-1} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontrando a inversa de B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 6$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-0}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação:
$A + BX = A^{-1}$
$BX = A^{-1} - A$
$X = B^{-1}(A^{-1} - A)$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Resposta correta: A

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{4}{2} \end{pmatrix}$$

$A^{-1}(x^t)^{-1} .\ B = I \rightarrow A .\ A^{-1}(x^t)^{-1} .\ B = A \rightarrow$
$\rightarrow (x^t)^{-1} .\ B = A \rightarrow (x^t)^{-1} .\ B .\ B^{-1} = A .\ B^{-1} \rightarrow$

$$\rightarrow (x^t)^{-1} = A .\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{-5}{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(x^t\right) = \frac{1}{\det\left(x^t\right)^{-1}}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^t = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Resposta correta: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow a + b + c + d =$
$= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Resposta correta: E

7. Para obter a inversa de uma matriz de ordem 2, podemos utilizar o método prático:
1º passo: Troca os elementos da diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2º passo: Troca o sinal dos elementos da diagonal secundária.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3^o Passo: Divide todos os elementos pelo determinante da matriz A que é det A = – 1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & \frac{-0}{-1} \\ \frac{-2}{-1} & \frac{-1}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando A^{-1} por B:

$$A^{-1} . B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta correta: E

8. Seja $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^j \text{ se } i \le j \\ j^i \text{ se } i > j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 \\ 1^2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = 4 - 1 = 3 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = A^t + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_{22} = \frac{13}{3}$$

9. Isolando X:

$A\,X^{-1}\,B^{-1} = I_n$

$A\,X^{-1} = I_n . B$

$A . X^{-1} = B$

$X^{-1} = A^{-1} . B$

$(X^{-1})^{-1} = (A^{-1} . B)^{-1}$

$X = B^{-1} . (A^{-1})^{-1}$

$X = B^{-1} . A$

Resposta correta: C

10. Calculando a inversa de M.

I. $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 5 - 6 = -1$

II. $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & \frac{-3}{-1} \\ \frac{-2}{-1} & \frac{5}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Resolvendo a equação:

$M + M^{-1} = T$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y \\ x & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y \\ x & -4 \end{pmatrix}$$

Assim: y = 6 e x = 4

III. $x + xy + y = 4 + 4 . 6 + 6 = \boxed{34}$

Resposta correta: B

Módulo 2

DETERMINANTES
(PÁGINAS 12 E 13)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Atribuindo valores a i e j:

I. i = 1 e j = 1

$a_{11} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4}(1+1)\right]$

$a_{11} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} . 2\right]$

$a_{11} = \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$

$a_{11} = \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$

$a_{11} = 1$

II. i = 2 e j = 2

$a_{22} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4}(2+2)\right]$

$a_{22} = \text{sen}\left[\frac{\pi}{4} . 4\right]$

$a_{22} = \text{sen}\ \pi$

$a_{22} = 0$

III. i = 2 e j = 1

$a_{21} = \text{sen}\,[x . (2 - 1)]$

$a_{21} = \text{sen}\ x$

IV. i = 1 e j = 2

$a_{12} = \text{sen}\,[x . (1 - 2)]$

$a_{12} = \text{sen}\,(-x)$

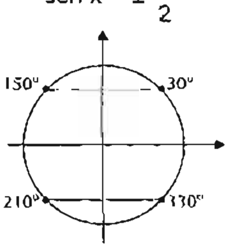
$a_{12} = -\text{sen}\ x$

Desta maneira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\text{sen}\,x \\ \text{sen}\,x & 0 \end{pmatrix}$$

det A = $\text{sen}^2 x$, como det A = $\frac{1}{4}$, então: $\text{sen}^2\,x = \frac{1}{4}$

$$\text{sen}\ x = \pm\ \frac{1}{2}$$



Como $-2\pi < x < 2\pi$, ou seja, $-360° < x < 360°$

I. $x = 30° + K \cdot 360°$
$K = 0 \Rightarrow x = 30°$
$K = -1 \Rightarrow x = -330°$

II. $x = 150° + K \cdot 360°$
$K = 0 \Rightarrow x = 150°$
$K = -1 \Rightarrow x = -210°$

III. $x = 210° + K \cdot 360°$
$K = 0 \Rightarrow x = 210°$
$K = -1 \Rightarrow x = -150°$

IV. $x = 330° + K \cdot 360°$
$K = 0 \Rightarrow x = 330°$
$K = -1 \Rightarrow x = -30°$

Resposta correta: B

2. Temos que:
$\det A = \text{sen}\,x \cdot \cos x + 8$ (x2)
$2 \det A = 2\,\text{sen}\,x \cos x + 16$, como $2\,\text{sen}x\cos x = \text{sen}2x$, então: $\det A = \dfrac{\text{sen}2x + 16}{2}$

Substituindo sen 2x por 1 e por – 1:

$$\left.\begin{aligned}\det A_{máx} &= \frac{1+16}{2} = \frac{17}{2}\\ \det A_{mín} &= \frac{-1+16}{2} = \frac{15}{2}\end{aligned}\right\} \det A_{máx} + \det A_{mín} = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = 16$$

Resposta correta: C

3. $\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$3 \cdot 2^x \cdot \log_2 x^2 - 3 \cdot 8^x \cdot \log_2 x = 0$
$3 \cdot 2^x \cdot 2\log_2 x^2 - 3 \cdot 8^x \cdot \log_2 x = 0$

Colocando $\log_2 x$ em evidência.
$3 \log_2 x\,(2 \cdot 2^x - 8^x) = 0$

$3\log_2 x = 0$ ou $2 \cdot 2^x - 8^x = 0$

$\log_2 x = 0$
$x = 2^0$
$x = 1$

$\boxed{a = 1}$

$2^{x+1} = 8^x$
$2^{x+1} = (2^3)^x$
$2^{x+1} = 2^{3x}$
$3x = x + 1$
$2x = 1$
$x = 1/2$

$\boxed{b = 1/2}$

$\boxed{a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$

Resposta correta: C

4. Aplicando a regra de Chió:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-1.2 & -2-1.1 & 1-1.0 \\ -1-1.2 & 2-1.1 & -1-1.0 \\ 3-1.2 & 3-1.1 & x-1.0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$-x + 3 - 6 - 1 - 2 - 9x = 0$
$-10x = 6$
$x = -0,6$

Resposta correta: C

5. $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{vmatrix}$

$f(x) = 2x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - x^2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f(f(x)) = [f(x)]^2$
$\Rightarrow f(f(x)) = x^4 \Rightarrow f(f(x)) < 1000 \Rightarrow x^4 < 1000$

Atribuindo valores a x:
Se $x = 5 \Rightarrow x^4 = 5^4 = 625 < 1000$
Se $x = 6 \Rightarrow x^4 = 6^4 = 1296 > 1000$

O maior valor de **x** menor que 1000 é 5.

Resposta correta: 5

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Observe que:

I. $x^2 + x - \dfrac{3}{4} = 0$

$4x^2 + 4x - 3 = 0$
$\Delta = 4^2 - 4.4.(-3) = 64$

$x' = \dfrac{-4+8}{2.4} = \dfrac{1}{2}$

$x'' = \dfrac{-4-8}{2.4} = \dfrac{-3}{2}$

$\boxed{R = \frac{1}{2}}$

II. $R = \begin{vmatrix} \text{sen}A & \cos A \\ \text{sen}11° & \cos 11° \end{vmatrix}$

$R = \text{sen}A\cos 11° - \text{sen}11°\cos A$
$R = \text{sen}(A - 11°)$
$\dfrac{1}{2} = \text{sen}(A - 11°)$
$\text{sen}(A - 11°) = \dfrac{1}{2}$
como $0 < A < 90°$
$A - 11° = 30°$
$\boxed{A = 41°}$

Resposta correta: 41°

2. $A = \begin{pmatrix} \text{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \to \det A = \text{sen}\alpha\cos\alpha - (-\text{sen}\alpha)(\cos\alpha) =$

$= 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{sen}(2x)$. Mas $\det A = \dfrac{1}{2} \to \text{sen}2\alpha = \dfrac{1}{2} \to$

$\to \text{sen}2\alpha = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Daí, $\alpha = \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$.

Portanto, $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$. Se $\det A = -\dfrac{1}{2} \to \alpha = \dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$,

de modo que $\dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{11\pi}{6} = 3\pi$

Resposta correta: D

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} [1-2(-1)] & [3-2.0] & [-1-2(-1)] \\ [2-0(-1)] & [1-0.0] & [0-0(-1)] \\ [0-(-1)(-1)] & [2-(-1).0] & [0-(-1)(-1)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Resposta correta: D

4. Resolvendo a equação:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 0 & -4 \\ -1+2^x & 2^x & 2^x \\ 3 & 3 & 3-\dfrac{3}{2^x} \end{vmatrix} = 0$$

$$2^x.\,2^x.\left(3 - \frac{3}{2^x}\right) - 4.3.(-1+2^x) + 4.3.2^x - 3.2^x.2^x = 0$$

$$\cancel{3.2^x.2^x} - 2^x.\cancel{2^x}.\frac{3}{\cancel{2^x}} + 12 - \cancel{12.2^x} + \cancel{12.2^x} - \cancel{3.2^x.2^x} = 0$$

$$-2^x.3 = -12 \Rightarrow 2^x.3 = 12 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Resposta correta: D

5. $A = \begin{pmatrix} \log_2 125 & \log_{16} 36 \\ \log_{36} 81 & \log_{125}(x^2+5x) \end{pmatrix}$ e $\det A = 3$.

$\det A = \log_2 125 - \log_{125}(x^2 + 5x) - \log_{36} 81 \,.\, \log_{16} 36 \to$

$$\det A = \frac{\log_{125}^{125}}{\log_{125}^{2}}\log_{125}^{(x^2+5x)} - \log_{36}^{81} \cdot \frac{\log_{36}^{36}}{\log_{36}^{16}} = \frac{\log_{125}^{(x^2+5x)}}{\log_{125}^{2}} -$$

$$-\frac{\log_{36}^{81}}{\log_{36}^{16}} = \log_2^{(x^2+5x)} - \log_{16}^{81} = \log_2^{(x^2+5x)} - \frac{\log_2^{81}}{\log_2^{16}} =$$

$$= \log_2^{(x^2+5x)} - \log_2^{81} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \log_2^{(x^2+5x)} - \log_2^{\sqrt[4]{81}} = \log\left(x^2 + 5x\right) -$$

$$-\log_2^3 = \log_2\left(\frac{x^2+5x}{3}\right)$$

Daí $\log_2\left(\dfrac{x^2+5x}{3}\right) = 3 = \log_2^8 \to \dfrac{x^2+5x}{3} = 8 \to$

$\to x^2 + 5x = 24 \to x^2 + 5x - 24 = 0$.

Resolvendo $\Delta = 25 + 4 - 24 = 121 \to \sqrt{\Delta} = 11$

Portanto, $x = \dfrac{-5 \pm 11}{2} \to x_1 = -\dfrac{16}{2} = -8$ e $x_2 = \dfrac{6}{2} = 3$

Daí, $S = \{-8; 3\}$

Resposta correta: E

6. $A = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & \sec\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\theta & \text{cossec}\,\theta \\ \text{tg}\theta & 1 & \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$. Então:

$\det A = \text{sen}^2\theta \,.\, \sec^2\theta + \cos\theta \,.\, \text{tg}\theta \,.\, \text{cossec}\theta + \cos\theta \,.\, \sec\theta -$
$- \text{tg}\theta \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \sec\theta - \text{cossec}\theta\text{sen}\theta - \cos^2\theta \,.\, \sec^2\theta \to$

$$\to \det A = \text{sen}^2\theta \,.\, \frac{1}{\cos^2\theta} + \cos\theta.\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}.\frac{1}{\text{sen}\theta} +$$

$$+ \cos\theta.\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}.\,\text{sen}\theta\,.\,\frac{1}{\cos\theta} -$$

$$-\frac{1}{\text{sen}\theta}.\text{sen}\theta - \cos^2\theta\,.\,\frac{1}{\cos^2\theta} \to$$

$$\det A = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 + 1 - \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - 1 - 1 = 0$$

Resposta correta: D

7. $\begin{vmatrix} n^2 & n & 1 \\ 2n & n+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64$

$n^2(n + 1) + 2n + 2n - (n + 1) - 2n^2 - 2n^2 = 64$

$n^3 + \cancel{n^2} + 2n + 2n - n - 1 - 4n^2 - \cancel{n^2} = 64$

$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = 64$

$(n - 1)^3 = 64 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow \boxed{n = 5}$

Resposta correta: A

8. $M = \begin{bmatrix} 3^p & 1-\sqrt{2}\,\text{sen}15° \\ 1+\sqrt{2}\,\text{sen}15° & 3^{2p} \end{bmatrix}$

$\det M = 3^p.3^{2p} - (1+\sqrt{2}\,\text{sen}15°)(1-\sqrt{2}\,\text{sen}15°)$

$\det M = 3^{3p} - 1 + 2\text{sen}^2 15°$

$$\det M = 3^{3p} - 1 + 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$\det M = 3^{3p} - 1 + \cancel{2}\cdot\frac{6-2.\sqrt{6}.\sqrt{2}+2}{\cancel{16}_8}$$

$$\det M = 3^{3p} - 1 + \frac{8-4\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} = 3^{3p} - \cancel{1} + \cancel{1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3^{3p} = 3\sqrt{3}$$

$$3^{3p} = 3^{3/2}$$

$$3p = \frac{3}{2}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Resposta correta: 1/2

9. $P(x) = \det\begin{pmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow P(x) = (3 - x)(a - x)(1 - x) + 4(3 - x) =$
$= (3 - x)\,(a - (1 + a)\,x + x^2) +$
$+ 4(3 - x) = (3 - x)(x^2 - (1 + a)x + a + 4)$

a) Se $a = 1$: $(3 - x)(x^2 - 2x + 3) = 0 \rightarrow x = 3$ ou $x^2 - 2x + 3 = 0$

Resolvendo $\Delta = 4 - 12 = -8 \rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$

Temos as raízes: $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$ e 3.

b) Como $x = 3$ é raiz independente do valor de a, então: $x^2 - (1 + a)x + 4 + a = 0$ não deve ter raízes reais, ou seja, $\Delta < 0$.
$\rightarrow (1 + a)^2 - 4(4 + a) < 0 \rightarrow 1 + 2a + a^2 - 16 - 4a < 0 \rightarrow$
$\rightarrow a^2 - 2a - 15 < 0 \rightarrow -3 < a < 5.$

10. Aplicando a regra de Chió:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2+x-1.1 & 1-1.1 & 1-1.1 \\ 1-1.1 & 3+x-1.1 & 1-1.1 \\ 1-1.1 & 1-1.1 & 1-x-1.1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 0 & 0 \\ 0 & 2+x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$-x\,(1 + x)\,(2 + x) = 0$
$-x = 0$ ou $1 + x = 0$ ou $2 + x = 0$
$x = 0$ $\quad x = -1$ $\quad x = -2$

A soma das raízes é $0 + (-1) + (-2) = -3$

Resposta correta: – 3

(PÁGINAS 16 E 17)

ATIVIDADES PARA SALA

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & x & x^2 \\ 16 & 81 & x^2 & x^4 \\ 64 & 729 & x^3 & x^6 \end{vmatrix} = 0$

Como a matriz **z** é de Vandermonde.

$(9 - 4)(x - 4)(x^2 - 4)(x - 9)(x^2 - 9)(x^2 - x) = 0$
Raízes positivas $x = 2, 9, 3, 1, 4$
Soma = 19

Resposta correta: E

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Para o elemento $a_{32} = 1$, a matriz cofator é dada por:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de modo que:

$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 1 + 10 = 16 - 5 = 11.$

$\cot_{32} = (-1)^{3+2}\det = -11$

Resposta correta: B

3. Aplicando o Teorema de Laplace usando a 1ª coluna:

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$

$\det A = (1 + \cos x)\begin{vmatrix} -1 & 1+\operatorname{sen} x & -1 \\ 1-\cos x & 1 & 0 \\ 1-\cos x & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\,.\,A_{21} + 0$

$A_{31} + 0\,.\,A_{41}$

$\det A = (1 + \cos x)\,(1 - \cos x)$
$\det A = 1 - \cos^2 x$
$\det A = \operatorname{sen}^2 x$

Resposta correta: E

4. Escolhendo a 4ª linha para aplicar o Teorema de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{vmatrix}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-5+4+30-4) = -25$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3-18+2+3+18-2 = 0$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12+15+12+10 = 25$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$

$= 1 \,.\, (-25) + 4 \,.\, 0 + 0 \,.\, A_{43} + 2 \,.\, 25$
$= 25$

Resposta correta: C

5. Aplicando o Teorema de Laplace usando a 5ª linha
$a_{51}A_{51} + a_{52}A_{52} + a_{53}A_{53} + a_{54}A_{54} + a_{55}A_{55} < -32$

$$x \,.\, (-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & h & i & j \end{vmatrix} + 0 \,.\, A_{52} + 0 \,.\, A_{53} + 0 \,.\, A_{54} + 0 \,.\, A_{55} < -32$$

$$x\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & h & i & j \end{vmatrix} < -32$$

Aplicando novamente, usando a 1ª coluna:
$x \,.\, (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}) < -32$

$$x \,.\, \left[0 \,.\, A_{11} + 0 \,.\, A_{21} + 0 \,.\, A_{31} + x \,.\, (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix}\right] < -32$$

$$x\,(-x)\begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$$

$-x^2 \,.\, (-x^3) < -32$
$x^5 < -32$
$x < -2$

Resposta correta: x < –2

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. $$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 21 \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(3-x) \,.\, 2$$

Raízes 1, 2, 3
$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

Resposta correta: B

2. Atribuindo valores a i e j:
I. i = 1 e j = 1
$a_{11} = \cos x$

II. i = 2 e j = 2
$a_{22} = \cos x$

III. i = 1 e j = 2
$a_{12} = 1$

IV. i = 2 e j = 1
$a_{21} = 1$

Portanto:
$$A = \begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & \cos x \end{pmatrix}$$

det A = $-1 + \cos^2 x$, como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, então:
det A = $-1 + 1 - \text{sen}^2 x$
det A = $-\text{sen}^2 x$

Resposta correta: E

3. Para a matriz ser inversível, seu determinante tem de ser diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Escolhendo a linha 4 para aplicar o Teorema de Laplace, só precisamos encontrar o cofator A_{43}:

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & 1 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$= -(\text{sen}\theta - \text{sen}\theta\cos\theta) = -\text{sen}\theta + \text{sen}\theta\cos\theta$

$$\begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} =$$

$0 \,.\, A_{41} + 0 \,.\, A_{42} + 1 \,.\, (-\text{sen}\theta + \text{sen}\theta\cos\theta) + 0 \,.\, A_{44} =$
$= -\text{sen}\theta + \text{sen}\theta\cos\theta$

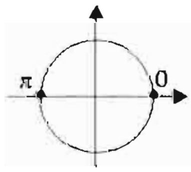
Como o determinante tem de ser diferente de zero:

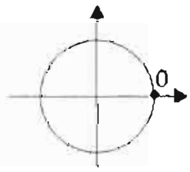
$= -\text{sen}\theta + \text{sen}\theta\cos\theta \neq 0$

$\text{sen}\theta\,(-1 + \cos\theta) \neq 0$

$\text{sen}\,\theta \neq 0$ e $-1 + \cos\,\theta \neq 0$

$\cos\,\theta \neq 1$





$\theta \neq 0 + n \,.\, \pi,\ n \in Z$
$\theta \neq n\pi,\ n \in Z$

Resposta correta: A

4. Sendo D o valor do determinante, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Tirando a transposta, o determinante não muda seu valor.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$D = (c - b)\,(c - a)\,(c - x)\,(b - a)\,(b - x)\,(a - x)$
$D = (c - b)\,(c - a)\,(c - x)\,(b - a)\,(b - x)\,(-1)\,(x - a)$

Observe que $x - a$ é um dos fatores de D, portanto, a divisão de D por $x - a$ deixa resto zero.

Resposta correta: D

5. O determinante é de Vandermond:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 7 & 49 & 243 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{x} & x^2 & x^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix}$$

$f(x) = (x-3)(x-7)(x-5)(3-7)(3-5)(7-5)$
$f(x) = 16(x-3)(x-7)(x-5)$

O polinômio $g(x) = x^2 - 10x + 21$ possui 3 e 7 como raízes, podendo ser escrito na forma $g(x) = 1(x - 3)(x - 7)$. Dividindo-se $f(x)$ por $g(x)$, teremos uma divisão exata tendo zero como resto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{16\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x-7)}(x-5)}{1\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x-7)}} = 16(x-5)$$

$R(x) = 0$
$R(2) = 0$

Resposta correta: A

6. O determinante é de Vandermond:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 & \log 7000 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 & (\log 7000)^2 \\ (\log 7)^3 & (\log 70)^3 & (\log 700)^3 & (\log 7000)^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\log 7000 - \log 700)(\log 7000 - \log 70)(\log 7000 - \log 7) =$$
$$= (\log 700 - \log 70)(\log 700 - \log 7)(\log 70 - \log 7) =$$
$$= \log\frac{7000}{700}.\log\frac{7000}{70}.\log\frac{7000}{7}.\log\frac{700}{70}.\log\frac{700}{7}.\log\frac{70}{7} =$$

$$= \log 10.\log 100.\log 1000.\log 10.\log 100.\log 10 =$$
$$= 1.2.3.1.2.1 = 12$$

Resposta correta: D

7. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira linha:

$$\begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 2 \quad 0} \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Só precisamos encontrar o cofator A_{13}.

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 8 \\ 0 & 8 & x \end{vmatrix}$$

$A_{13} = x^3 - 64x$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}.A_{14}$$

$$0 \qquad = 0.A_{11} + 0.A_{12} + 2.(x^3 - 64x) + 0.A_{14}$$

$2x^3 - 128x = 0$
$2x(x^2 - 64) = 0$
$2x = 0$ ou $x^2 - 64 = 0$
$x = 0$ $\qquad x^2 = 64$
$\qquad x = \pm 8$

O maior valor é 8.

Resposta correta: D

8. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & x & 2 & 10 \\ 3 & 8 & x & 15 \\ 1 & 13 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -15 \\ 5 & x-3 & 0 \\ 12 & 0 & x-5 \end{vmatrix} < 0$$

(1) Regra de Chió.

$(x - 2)(x - 3)(x - 5) + 12 . 15(x - 3) < 0$
$(x - 3)(x^2 - 5x + 6 + 12 . 15) < 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 . 12 . 15 < 0$
$\rightarrow x^2 - 5x + 6 + 12 . 15 > 0$ para todo x. Daí, devemos ter $x < 3$ para satisfazer a equação e 1 e 2 são os únicos inteiros positivos nessas condições.

Resposta correta: A

9. Temos $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz identidade.

Logo, $M + xI = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix}$. Assim, temos que:

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3 - 2 + 2x - x = x^3 + x - 2$$

Se α_1, α_2, α_3 são raízes de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, devemos saber que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{B}{A}$. Sendo a equação $x^3 + x - 2 = 0 \rightarrow B = 0$ e $A = 1$, logo, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Resposta correta: B

10. Aplicando o Teorema de Laplace, usando a 1ª coluna:
$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} + a_{51}A_{51}$

$$\det A = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} +$$
$$+ 0.A_{51}$$

$$\det A = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente o Teorema de Laplace:

$\det A = x\,(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41})$

$$\det A = x \cdot \left[x.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} \right]$$

$$\det A = x^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$\det A = x^2\,(x^3 + 8)$

$f(x) = x^5 + 8x^2$

$f(-1) = (-1)^5 + 8 \cdot (-1)^2$
$f(-1) = 7$

Resposta correta: D

(PÁGINAS 20 E 21)

ATIVIDADES PARA SALA

1. $\det (2 \cdot A \cdot A^t) = 4x$
ordem de A
$2^3 \det (A \cdot A^t) = 4x$
$8 \cdot \det A \cdot \det A^t = 4x$
$8 \cdot \det A \cdot \det A = 4x$
$8 \cdot 4 \cdot 4 = 4x \Rightarrow x = 32$

Resposta correta: D

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$

Trocando-se a 1ª pela 3ª linha, o valor do determinante muda de sinal.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Dividindo-se a 2ª linha por 3, o valor do determinante será dividido por 3:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Resposta correta: D

3. Aplicando o Teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{7} & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 18 & 111 & 0 & 7 \\ 1 & 11 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{21} \cdot 19 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{21} \cdot 19 \cdot (-5) \cdot (-7) =$$
$$= 665\sqrt{21}$$

Resposta correta: C

4. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B^{-1} = 2A$.

Sabemos que $B^{-1} \cdot B = I \rightarrow B^{-1} \cdot B = 2A \cdot B = I \rightarrow 2A \cdot B = I$

Se $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ -d+g & -e+h & -f+i \\ a+2g & b+2h & c+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Temos: $\begin{cases} c+2f+3i = 0 \\ -f+i = 0 \rightarrow i = f \\ c+2i = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2} - 2f \end{cases}$,

logo: $\frac{1}{2} - 2f + 2f + 3f = 0 \rightarrow f = -\frac{1}{6} \rightarrow i = -\frac{1}{6} \rightarrow c = \frac{5}{6}$

$\begin{cases} b+2e+3h = 0 \\ -e+h = \frac{1}{2} \rightarrow e = h - \frac{1}{2} \\ b+2h = 0 \quad b = -2h \end{cases}$

logo: $-\cancel{2h} + \cancel{2h} - 1 + 3h = h = \frac{1}{3} \rightarrow e = -\frac{1}{6} \rightarrow b = -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} a + 2d + 3g = \frac{1}{2} \\ -d + g = 0 \to d = g \\ a + 2g = 0 \to a = -2g \end{cases}$$

logo: $-\cancel{2g} + \cancel{2g} + 3g = \frac{1}{2} \to g = \frac{1}{6} \to d = \frac{1}{6} \to a = -\frac{1}{3}$

Daí, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, então:

$\det B = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(-2 + \cancel{4} + 10 + 5 - \cancel{4} - 4\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 . 9 = \frac{1}{24}$

Resposta correta: E

5.

$\div x$

$$\begin{vmatrix} x & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{7} \\ x & x & 2 & \sqrt{7} \\ x & x & x & \sqrt{7} \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$$

$x(-2)$ $x(-\sqrt{3})$ $x(-\sqrt{7})$

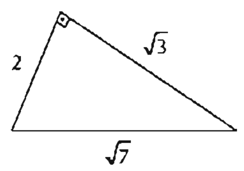
$$x \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{7} \\ 1 & x & 2 & \sqrt{7} \\ 1 & x & x & \sqrt{7} \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x - \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & x - \sqrt{3} & x - 2 & 0 \\ 1 & x - \sqrt{3} & x - 2 & x - \sqrt{7} \end{vmatrix} = 0$$

$x . 1 . \left(x - \sqrt{3}\right) (x - 2) \left(x - \sqrt{7}\right) = 0$

$x = 0$ ou $x - \sqrt{3} = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - \sqrt{7} = 0$

$x = \sqrt{3}$ $\quad x = 2$ $\quad x = \sqrt{7}$



Note que o triângulo de lados 2, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{7}$ é retângulo $\left(\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2\right)$, portanto, a área do triângulo será

$\frac{\text{cateto x cateto}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{u.a.}$

Resposta correta: B

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. $MA - 2B = 0$
$MA = 2B$

$\det M . A = \det 2B$
$\det M . \det A = 2^2 . \det B$

Como $\det A = 6 - 4 = 2$ e $\det B = 8 - 7 = 1$, então:
$\det M . 2 = 4 . 1$
$\det M = 2$
$\det M^{-1} = \frac{1}{2}$

Resposta correta: B

2. As matrizes A e B são triangulares:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-2).1.3 = -6$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-2).1.3 = -6$$

Desta maneira:
$\det A . B = \det A . \det B = (-6) . (-6) = 36$

Resposta correta: D

3. Separando a soma da 1ª linha:

$$\det C = \begin{vmatrix} a+m & b+n & c+o \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & o \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$\det C = \det A + \det B$

$\det C = 2 + 3 \Rightarrow \det C = 5$

Resposta correta: E

4. Observe que:

I. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$A^t = B$
$\det A^t = \det B$
$\det A = \det B$
$\det B = K$

II. $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$K = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$-K = \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$\det C = -K$

III. $D = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$

$D = 3A$

$\det D = \det 3A$

$\det D = 3^3 \det A$

$\det D = 27 \, . \, K$

Portanto:

$\det B + \det C + \det D = K - K + 27K = 27K$

Resposta correta: D

5. Observe que:

$\det A^2 = \det A \, . \, A$

$\det A^2 = \det A \, . \det A$

$\det A^2 = (\det A)^2$

Resposta correta: E

6. **1ª Solução:**

Aplicando o Teorema de Laplace à primeira coluna

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} + a_{41}.A_{41} + a_{51}.A_{51}$$

$$f(x) = x . \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} + 0.A_{51}$$

Aplicando Laplace novamente à 1ª coluna

$$f(x) = x . \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x . (a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} + a_{41}.A_{41})$$

$$f(x) = x . (x . \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & k \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41})$$

$$f(x) = x^2 . \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & k \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x^2(a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31})$$

$$f(x) = x^2(x . \begin{vmatrix} x & k \\ 1 & x \end{vmatrix} + 0.A_{21} + 0.A_{31})$$

$$f(x) = x^3 . \begin{vmatrix} x & k \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x^3(x^2 - k)$$

$f(-2) = (-2)^3\,[(-2)^2 - k]$, como $f(-2) = 8$

$8 = -8(4 - k)$

$8 = -32 + 8k$

$-8k = -40$

$\boxed{k = 5}$

2ª Solução:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 0 & 0+1 & x+0 \end{vmatrix}$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$f(x) = x^5 + (a_{51}A_{51} + a_{52}A_{52} + a_{53}A_{53} + a_{54}A_{54} + a_{55}A_{55})$

$f(x) = x^5 + (0.A_{51} + 0.A_{52} + 0.A_{53} + 1 \, . \, (-1)^{5+4}.$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} + 0.A_{55})$$

$f(x) = x^5 - x^3 \, . \, k$

$f(-2) = (-2)^3\,[(-2)^2 - k]$, como $f(-2) = 8$

$8 = -8(4 - k)$

$8 = -32 + 8k$

$-8k = -40$

$\boxed{k = 5}$

Resposta correta: 5

7. Temos $M^3 = 8I \rightarrow \det(M^3) = \det\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64$.

Sabemos que $\det M^3 = (\det M)^3 \rightarrow \det M = 4$.

Resposta correta: C

8. Seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de modo que (a, b, c, d) formam uma P.G. de razão q: $b = aq$, $c = aq^2$ e $d = aq^3$.

logo: $M = \begin{pmatrix} a & aq \\ aq^2 & aq^3 \end{pmatrix}$ e $\det M = a \cdot aq^3 - aq^2 \cdot aq =$

$= a^2q^3 - a^2q^3 = 0$

Resposta correta: A

9. $P^{-1} = 3M$

$\det P^{-1} = \det 3M$

$\frac{1}{\det P} = 3^2 . \det M, \text{como } \det M = 5$

$\frac{1}{\det P} = 3^2 . 5$

$45 \det P = 1 \Rightarrow \det P = \frac{1}{45}$

Resposta correta: A

10. Calculando o valor de det A

$\det A = \begin{vmatrix} \text{sen}x & \cos x \\ -2\cos x & 2\text{sen}x \end{vmatrix} =$

$\Rightarrow 2\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 2.1 = 2$

Desta maneira:

$\det\left(\frac{1}{4}.A^5\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 .(\det A)^5 = \frac{1}{16}.2^5 =$

$= \frac{1}{16}.32 = 2 = \det A$

Resposta correta: C

(PÁGINAS 23 E 24)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Sabemos que $\cos^2 x - (-\text{sen}^2 x) = 1$, $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$ e $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x = 1$, portanto, $L_1 - L_2 = L_3$, assim o determinante é nulo.

Resposta correta: B

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1q & a_1q^2 \\ a_1q^3 & a_1q^4 & a_1q^5 \\ a_1q^6 & a_1q^7 & a_1q^8 \end{vmatrix}$

Dividindo-se a linha 2 por q^3 e multiplicando-se o determinante:

$q^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1q & a_1q^2 \\ a_1 & a_1q & a_1q^2 \\ a_1q^6 & a_1q^7 & a_1q^8 \end{vmatrix}$, linha 1 = linha 2

$= q^3 . 0 = 0$

Resposta correta: A

3. O valor máximo de i é 3, para o logaritmando não ser nulo e o valor máximo de j é 3, para o denominador não ser zero. Portanto, M é de ordem 3.

Atribuindo valores a i e j:

• Se $i = 3 \Rightarrow M_{3j} = \frac{(3+j).\log(4-3)}{\sqrt{16-3^2}}$

$M_{3j} = \frac{(3+j).\log 1}{\sqrt{7}}$

$M_{3j} = \frac{(3+j).0}{\sqrt{7}}$

$M_{3j} = 0$

Observe que todo elemento da linha 3, M_{31}, M_{32} e M_{33}, são nulos, portanto det M = 0

Resposta correta: A

4. $\begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ n+2 & n+3 & n+4 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ (n+1)+1 & (n+2)+1 & (n+3)+1 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix}$

$L_1 = L_2$ $\qquad$ $L_1 + 2 . L_2 = L_3$

$0 + 0 = 0$

Resposta correta: E

5. Calculando o primeiro determinante:

Podemos subtrair a 1ª linha da 2ª linha e a 3ª linha da 4ª linha que o valor do determinante se mantém inalterado.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6-1 & 7-2 & 8-3 & 9-4 & 10-5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16-11 & 17-12 & 18-13 & 19-14 & 20-15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$, a linha 2 é igual à linha 4, por isso o determinante é nulo.

0

Para calcular o segundo determinante, devemos escolher a 2ª linha e aplicar o teorema de Laplace.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} + a_{24}.A_{24}$

Só é necessário calcular o cofator de A_{22}.

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4&5\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix} = 4+10-4-2=8$$

$$\begin{vmatrix}1&2&4&5\\0&1&0&0\\1&3&0&1\\1&4&2&1\end{vmatrix} = 0.A_{21}+1.8+0.A_{23}+0.A_{24}=8$$

Desta maneira:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\16&17&18&19&20\\21&22&23&24&25\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2&4&5\\0&1&0&0\\1&3&0&1\\1&4&2&1\end{vmatrix} = 0+8=8$$

Resposta correta: 8

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Sendo K o valor do determinante, teremos:

$$K = \begin{vmatrix}a+m+1&b+n+1&c+p+1\\1&1&1\\2x&2y&2z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\2x&2y&2z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}m&n&p\\1&1&1\\2x&2y&2z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2x&2y&2z\end{vmatrix}$$

$$K = 2\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\x&y&z\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}m&n&p\\1&1&1\\x&y&z\end{vmatrix} + 0$$

$$K = -2.\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}m&n&p\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$K = -2A - 2B$

Resposta correta: A

2. Seja $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&b\\b&c&a&a\\c&a&b&c\end{vmatrix} = k$. Reduzindo a matriz:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&b\\b&c&a&a\\c&a&b&c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b-a&c-a&b-a\\c-b&a-b&a-b\\a-c&b-c&0\end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix}b-a&c-a&1\\c-b&a-b&-1\\a-c&b-c&0\end{vmatrix} =$$

$= (b-a)[(a-c)^2 - (b-c)^2 - (a-c)(a-b) + (b-a)(b-c)] =$

$= (b-a)[(\cancel{a^2} - 2ac + \cancel{c^2} - \cancel{b^2} + 2bc - \cancel{c^2} - \cancel{a^2} + \cancel{ab} +$
$+ ac - cb + \cancel{b^2} - bc - \cancel{ab} + ac] = (b-a)[-2ac + 2bc + 2ac -$
$- 2bc] = 0$. Logo: $k = 0$, portanto, $2^k = 1$.

Resposta correta: B

3. $\det(4A.\,B^{-1}) = 4^n.\det A.\,B^{-1}$

$= 4^n.\det A.\det B^{-1}$

$= 4^n.\det A.\dfrac{1}{\det B}$

$= 4^n.a.\dfrac{1}{b}$

$= \dfrac{4^n.a}{b}$

Resposta correta: A

4. $A = \begin{pmatrix}2&3&5\\4&2&3\\7&1&5\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ matriz dos cofatores.

$a = b_{11} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&5\end{vmatrix} = 7$; $b = b_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&3\\7&5\end{vmatrix} = 1$

$c = b_{1+3} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&2\\7&1\end{vmatrix} = -10$; $d = b_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&5\\1&5\end{vmatrix} = -10$

$e = b_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&5\\7&5\end{vmatrix} = -25$; $f = b_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\7&1\end{vmatrix} = -19$

$g = b_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&5\\2&3\end{vmatrix} = -1$; $h = b_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&5\\4&3\end{vmatrix} = 14$

$i = b_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix} = -8$

$E = ?$

Resposta correta: D

5. Podemos somar a 1ª e 4ª linhas à 3ª linha que o valor do determinante não se altera:

$$\begin{vmatrix}x&y&z&w\\3&3&3&3\\y+z&x+w&x+w&y+z\\w&z&y&x\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}x&y&z&w\\3&3&3&3\\x+y+z+w&x+y+z+w&x+y+z+w&x+y+z+w\\w&z&y&x\end{vmatrix}$$

$L_3 = \dfrac{(x+y+z+w)}{3}.L_2$

Como as linhas 2 e 3 são proporcionais, o determinante é nulo.

Resposta correta: C

6. $D = \begin{vmatrix}\text{sen}18^\circ&\cos72^\circ\\\text{sen}36^\circ&\cos54^\circ\end{vmatrix}$

Como $\text{sen}18^\circ = \cos72^\circ$ e $\text{sen}36^\circ = \cos54^\circ$

$$D = \begin{vmatrix} \cos 72° & \cos 72° \\ \cos 54° & \cos 54° \end{vmatrix}, \text{ Col1} = \text{Col2}$$

$D = 0$

Resposta correta: C

7. $$\begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = P$$

Vamos usar o Teorema de Laplace na primeira coluna:

$$P = bcd\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} - acd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} + abd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} -$$

$$-abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

observe que os novos determinantes são todos de Vandermonde.

$P = bcd(c - d)(b - d)(b - c) - acd(c - d)(a - d)(a - c) +$
$+ abd(b - d)(a - d)(a - b) - abc(a - c)(a - b)(b - c)$

8. Se M é quadrada de ordem n, sabemos que:
$\det(K \cdot M) = K^n \det M$; onde K é um número real.

I. $\det(2m) = 2^3 \det M = 16$
II. $\det(3m) = 3^3 \det M = 54$

$2 + 16 + 54 = 72$

Resposta correta: E

9. $$A = \begin{vmatrix} \text{sen}^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \cos^2\beta & \text{sen}^2\beta & 1 \\ 1 & \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta \end{vmatrix}$$

Digamos: $\text{sen}^2\alpha = x$; $\text{sen}^2\beta = y$; $\text{sen}^2\theta = z$
Daí, $\cos^2\alpha = 1 - x$; $\cos^2\beta = 1 - y$; $\cos^2\theta = 1 - z$.
Assim:
$\det A = xyz + (1 - y)(1 - z) + (1 - x)$
$- y - (1 - z)x - (1 - x)(1 - y)z \to$
$\det A = \cancel{xyz} + 1 - y - z + yz + 1 - x - y - x + 2x$
$-z + xz + yz - \cancel{xyz} \to$
$\det A = 2 - 2x - 2y - 2z + 2yz + 2xz \to$
$\det A = 2 - 2z - 2(x + y) + 2z(x + y) \to$
$\det A = -2(z - 1) + 2(x + y)(z - 1) \to$
$\det A = 2(z - 1)(x + y - 1)$
$\to \text{Det}A = 2(\text{sen}^2\theta - 1)(\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta - 1)$.
Existem diversos valores para o determinante.

Módulo 3

Sistema Linear
(Páginas 29 e 30)

Atividades para Sala

1. $$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3})^x}{3} = 3^y \Rightarrow 3^{x/2} = 3^{y+1} \Rightarrow \boxed{x = 2y + 2} \text{ (I)} \\ \dfrac{\log(x-1) - \log y}{2} = \log\sqrt{3} \Rightarrow \log\dfrac{x-1}{y} = \log 3 \end{cases}$$
$\boxed{3y = x - 1}$ (II)

De (I) e (II)
$2y + 2 = 3y + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x + y = 5$

Resposta correta: A

2. Sendo **x**, **y** e **z** o número de crianças, senhores e senhoras, respectivamente, teremos:

	Crianças	Senhores	Senhoras
Nº de refrigerantes	2x	3y	3z
Nº de salgados	8x	5y	6z
Nº de docinhos	4x	3y	3z

Como são 90 refrigerantes, 230 salgados e 120 doces, teremos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ 8x + 5y + 6z = 230 \\ 4x + 3y + 3z = 120 \end{cases}$$

Somando a 1ª e a 3ª equações

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + 3z = 90 \\ +\ 4x + 3y + 3z = 120 \\ \hline 6x + 6y + 6z = 210 \quad (\div 6) \\ x + y + z = 35 \end{array}$$

O total de convidados é 35.

Resposta correta: B

3.
I. $3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 27 \Rightarrow \cancel{3}^{x+y+z} = \cancel{3}^3 \Rightarrow x + y + z = 3$

II. $2^x \cdot 2^z = 2^9 \cdot 4^y \Rightarrow 2^{x+z} = 2^{9+2y} \Rightarrow x + z - 2y = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2y + z = 9$

III. $64 \cdot 4^x = 4^z \Rightarrow 2^6 \cdot 2^{2x} = 2^{2z} \Rightarrow 2^{6+2x} = 2^{2z} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 2z = -6$

IV. $x + z = 9 + 2y \Rightarrow 3 - y = 9 + 2y \Rightarrow 3y = -6 \Rightarrow y = -2$

V. $$\begin{array}{l} \begin{cases} x - \cancel{z} = -3 \\ x + \cancel{z} = 5 \end{cases} + \\ \hline 2x = 2 \\ x = 1 \end{array}$$

VI. $1 - z = -3 \Rightarrow z = 4$

Julgando os itens, temos:
(I) F, pois $x + y + z = 3$
(II) F, pois $x + y + z = 3$
(III) V, pois $4 + 2 \cdot (-2) = 0$

(IV) V, temos o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y+z=9 \\ x+0y-z=-3 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & -1 & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & & 1 & 2 \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$; det(m) = 6

(V) V, temos o sistema

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 3 & \\ & 1 & 1 & 3 & \\ & 1 & -2 & 9 & \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 9 \\ 6 & 1 & & 3 & 6 \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$; det(m) = 24

Resposta correta: F, F, V, V, V

4. Calculando D_y e D

$$\begin{cases} 50x + 25y + 150z + 200w = 50 \\ 18x - 6y + 12z + 42w = -12 \\ -36x + 108y + 36z + 36w = 216 \\ 80x + 10y + 90z + 40w = 140 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 50 & 25 & 150 & 200 \\ 18 & -6 & 12 & 42 \\ -36 & 108 & 36 & 36 \\ 80 & 70 & 90 & 40 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 50 & 50 & 150 & 200 \\ 18 & -12 & 12 & 42 \\ -36 & 216 & 36 & 36 \\ 80 & 140 & 90 & 40 \end{vmatrix}_{\div 2} = 2\begin{vmatrix} 50 & 25 & 150 & 200 \\ 18 & -6 & 12 & 42 \\ -36 & 108 & 36 & 36 \\ 80 & 70 & 90 & 40 \end{vmatrix} = 2$$

Portanto,

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2D}{D} = 2$$

Resposta correta: 2

5. Simplificando o sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8 \\ (x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)^3 = 8 \\ (x+y)(x-y).(x-y)^2 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ (x+y)(x-y)^3 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ (x+y)2^3 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Portanto, $7(x+y)$
$7(4+2)$
$\boxed{42}$

Resposta correta: 42

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.

I. Se

$$\begin{cases} 27^x = 9^y \Rightarrow \cancel{3^{3x}} = \cancel{3^{2y}} \Rightarrow x = \dfrac{2y}{3} \\ \log_y x = 2 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow \dfrac{2y}{3} = y^2 \Rightarrow 3y^2 - 2y = 0 \begin{cases} y = 0\ (F) \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$(y, x > 0 \text{ e } y \neq 1)$

II. $x = \dfrac{2 \cdot \frac{2}{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{4}{9}$

III. $x + y = \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{9} = \dfrac{10}{9}$

Resposta correta: B

2. Sendo **x** e **y** os números dos tijolos da base:

		104		
	44		60	
2x + 8		x + y + 12		2y + 16
x + 2	x + 6		y + 6	y + 10
2	x	6	y	10

Continuando a sequência:

$$\begin{cases} 2x + 8 + x + y + 12 = 44 \\ x + y + 12 + 2y + 16 = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 24 \quad \times(-3) \\ x + 3y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x - 3y = -72 \\ x + 3y = 32 \end{cases}$$

$8x = 40 \Rightarrow x = 5$

Resposta correta: E

3. $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$

- $\dfrac{5n}{4m + 3n} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow 8n = 4m + 3n \Rightarrow \boxed{5n = 4m}(1)$
- $\dfrac{m-2}{4m+3n} = \dfrac{3}{32} \Rightarrow 32m - 64 = 12m + 9n \Rightarrow 20m - 64 = 9n$
- $25n - 64 = 9n \Rightarrow 16n = 64 \rightarrow n = 4 \overset{(1)}{\Rightarrow} m = 5$
- $m + n = 9$

Resposta correta: A

4. Multiplicando as matrizes:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Aplicando a regra de Cramer:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+3y-5z=0\\ x+2y-3z=1\end{cases}$$

I. $\det A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = -9-5+2\cancel{-3}+10\cancel{+3}=-2$

II. $\det A_x = \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = -5-3=-8$

$$x=\frac{\det A_x}{\det A}=\frac{-8}{-2}=4$$

III. $\det A_y = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -5\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix} = 1+5=6$

$$y=\frac{\det A_y}{\det A}=\frac{6}{-2}=-3$$

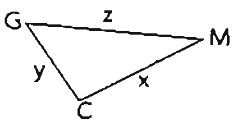
IV. $\det A_z = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 3-1=2$

$$z=\frac{\det A_z}{\det A}=\frac{2}{-2}=-1$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$$

Resposta correta: E

5. 

$$\begin{cases}x+y=522\\ y+z=550\\ x+z=568\end{cases}$$

Somando,

$2(x+y+z)=1640 \rightarrow x+y+z=820\text{km}$

Resposta correta: A

6. Sejam, **x** a quantidade de cédulas 10 dólares,
y a quantidade de cédulas 50 dólares,
z a quantidade de cédulas 100 dólares

$$\begin{cases}10x+50y+100z=1950\\ x+y+z=45\\ x+2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}50y+120z=1950\\ y+32=45\end{cases}$$

$$\begin{cases}50y+120z=1950\\ 50y+150z=2250\end{cases}\Rightarrow 30z=300\Rightarrow z=10$$

Totalizando 1000 dólares

Resposta correta: D

7. Temos que:

$$\begin{cases}\log_2(x+2y)-\log_2(x-2y)=2\\ x^2-4y^2=4\end{cases}$$

I. $\log_2(x+2y)-\log_2(x-2y)=2$

$$\log_2\frac{(x+2y)}{(x-2y)}=2$$

$$\frac{(x+2y)}{(x-2y)}=2^2$$

$$\frac{(x+2y)}{(x-2y)}=4$$

$x+2y=4(x-2y)$

II. $x^2-4y^2=4$
$(x-2y)(x+2y)=4$
$(x-2y)\,.\,4\,.\,(x-2y)=4$
$(x-2y)^2=1$
$x-2y=\pm 1$, como $x-2y>0$, então:
$x-2y=1$

III. Substituindo (II) em (I):
$x+2y=4(x-2y)$
$x+2y=4\,.\,1$
$x+2y=4$

IV. De (III) e (II):

$$\begin{cases}x-2y=1\\ x+2y=4\end{cases}$$

$$\therefore x=\frac{5}{2},\ y=\frac{3}{4} \text{ e } x+y=\frac{13}{4}$$

Resposta correta: D

8. Digamos, **x** moedas de 10 centavos e
y moedas de 25 centavos.
Temos $0{,}1x+0{,}25y=15{,}60$ e $y=2x$

$$\text{Daí } \frac{x}{10}+\frac{2x}{4}=15{,}6\Rightarrow\frac{x+5x}{10}=15{,}6\Rightarrow 6x=156$$

$$\Rightarrow x=26\Rightarrow y=52\Rightarrow\boxed{x+y=78}$$

Resposta correta: C

9.

$$\begin{cases}x-2y+4z+7=10 & (I)\\ 2x-y+2-27=20 & (II)\\ -x+y+2z-7=-10 & (III)\\ 3x+y-2+7=30 & (IV)\end{cases}$$

(I) + (III): $-y+6z=0\rightarrow\boxed{y=6z}$, substituindo

$$\begin{cases} x - 8z + 7 = 10 \text{(I)} \\ 2x - 5z - 27 = 20 \text{(II)} \\ 3x + 5z + 7 = 30 \text{(III)} \end{cases}$$

(II) + (III): $5x - 7 = 50$
-5 (I) + 8 (II) : $11x + 117 = 110$
Subtraindo $\rightarrow 7 = 0 \rightarrow x = 10$

Resposta correta: E

(PÁGINAS 34 E 35)

ATIVIDADES PARA SALA

1.

$$\begin{cases} 10x - 2y = 3 \\ ax - y = b \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ b & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10b = 15 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

Discutindo:
Se $a \neq 5 \rightarrow$ SPD
Se $a = 5$ e $b = \frac{3}{2} \rightarrow$ SPI
Se $a = 5$ e $b \neq \frac{3}{2} \rightarrow$ SI

2. $$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 4 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2 \text{ e } -K \neq -2$$

$\rightarrow$ única solução

Resposta correta: C

3. Igualando D = 0

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a + 4 + 4a + 4 - 2a - 4a = 0$$

$$-4a = -8$$

$$a = 2$$

Igualando $D_x = 0$:

$$D_x = \begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2b + 6 + 2 + 6 - 2b - 2 = 0$$

$$-4b = -12$$

$$b = 3$$

- Se $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD
- Se $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow$ SPI
- Se $a = 2$ e $b \neq 3 \Rightarrow$ SI

4. Se o sistema admite uma única solução, então $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\cancel{2} + 6 - 3c - \cancel{2} \neq 0$
$-3c \neq -6$
$c \neq 2$

Resposta correta: $c \neq 2$

5. $$\begin{cases} x - 3y + z = 4 & \text{(I)} \\ 2x - y + 3z = 0 & \text{(II)} \\ x + y + mz = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

(II) + (III) $\Rightarrow \boxed{3x + (3 + m)z = 1}$ (1)

(I) – 3(II) $\Rightarrow -6x + x - \cancel{3y} + \cancel{3y} + z - 9z = 4$

$\rightarrow \boxed{-5x - 8z = 0}$ (2)

Sistema com (1) e (2)

$$\begin{cases} 3x + (3 + m)z = 1 & \text{(i)} \\ -5x - 8z = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

5(i) + 3(ii) $\rightarrow 15x + 5(3 + m)z - 15x - 24z = 5$

$\rightarrow (15 + 5m - 24)z = 5 \rightarrow (5m - 9)z = 5 \rightarrow \boxed{m \neq \frac{9}{5}}$

- Se $m = \frac{9}{5}$ o sistema é incompatível.

Resposta correta: A

6. $$\begin{cases} bx + y + 0z = 1 \\ by + 0y + z = 1 \\ x + 0y + bz = 1 \end{cases}, \text{ temos } \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 1 - b^2 = 0 \quad \boxed{b = \pm 1}$$

I. Se b = 1;

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, duas linhas iguais

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, duas linhas iguais

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, mesma matriz inicial

II. Se b = – 1.

- $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Se $b = -1 \rightarrow$ SI.

Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x + my = n \end{cases}$ Poderíamos escalonar, mas vamos fazer Cramer.

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m + 6 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow$ SPD

• Se $m \neq -2$, temos:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 10}$

$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $m \neq -2$ e $n = 10 \Rightarrow$ SPI

• Se $n \neq 10$ e $m \neq -2 \Rightarrow$ SI.

2.
$\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

Note que $D = 0$ e $D_i = 0\ \forall i = 1, 2, 3$.
Daí o sistema é SPI.

Resposta correta: E

3.
$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ x - y + 0z = -1 \\ x + k^3y + 0z = k \end{cases}$

Note que $D = D_1 = D_2 = 0$.
Para que o sistema seja possível devemos ter $D_3 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & k^3 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k + k^3 - 1 + k^3 - k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^3 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = -1, 1, 0}$

Resposta correta: A

4. Aplicando a regra de Cramer:

$\begin{cases} 3x - 4y + z = 15 \\ -x + 3y - 2z = -10 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$

I. $D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 8 - 1 - 3 + 6 + 4 = 5$

II. $D_x = \begin{vmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -10 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -45 - 8 - 10 + 3 + 30 + 40 = 10$

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{10}{5} = 2$

III. $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ -1 & -10 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{30} - \cancel{30} + 1 + 10 - 15 - 6 = -10$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-10}{5} = -2$

IV. $D_z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 15 \\ -1 & 3 & -10 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 40 - 15 - 45 + 30 + 4 = 5$

$z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{5}{5} = 1$

$\boxed{x + y + z = 2 + (-2) + 1 = 1}$

Resposta correta: A

5. Aplicando a regra de Cramer:
$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = b \\ 5x + 7y + az = 8 \end{cases}$

I. $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & a \end{vmatrix} = 8a + 45 - 84 + 80 - 42 - 9a$

$D = -a - 1$

II. $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ b & 4 & 3 \\ 8 & 7 & a \end{vmatrix} = 4a + 72 - 28b + 128 - 21 - 3ab$

$D_x = 4a - 3ab + 179 - 28b$

Se $D = 0$ e $D_x \neq 0$, o sistema será impossível, ou seja, incompatível.

I. $D = 0$
$-a - 1 = 0$
$-a = 1 \Rightarrow a = -1$

II. $D_x \neq 0$
$4(-1) - 3(-1)b + 179 - 28b \neq 0$
$-25b \neq -175$
$b \neq 7$

$\boxed{\text{Se } a = -1 \text{ e } b \neq 7 \text{ o sistema será incompatível.}}$

Resposta correta: D

6. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - ay = \log_b(-a) \end{cases}$

Sendo SPI, temos:

I. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 0 \to \boxed{a = -2}$

II. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \log_b 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \log_b 2 = 4 \Rightarrow b^4 = 2$

$\Rightarrow b^{-2} = 2^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta correta: C

7. Para o sistema não admitir solução é necessário que $D = 0$ e D_x ou D_y ou $D_z \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha - 1 + 2 + 2 + 1 + \alpha = 0 \rightarrow 2\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -2$

Verificando D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$D_x = -6 + 2 + 6 + 2$

$D_x = 4 \neq 0$

Resposta correta: E

8. Aplicando a regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

I. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + \cancel{2} - 1 - \cancel{2} - 1 + 3 = 4$

II. $D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 + 6 = 4$

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{4}{4} = 1$

III. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 + 4 - 1 = -4$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-4}{4} = -1$

Substituindo x e y numa das equações:
$x - y + z = 2 \Rightarrow 1 - (-1) + z = 2 \Rightarrow z = 0$

$\boxed{x + y + z = a + b + c = 1 + (-1) + 0 = 0}$

Resposta correta: A

9. Para não admitir única solução é necessário que $D = 0$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 4 \\ m^2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 32 + 4m^2 + 4m - 2m^2 - 16 - 16m$$

$D = 2m^2 - 12m + 16$
$2m^2 - 12m + 16 = 0 \quad (\div 2)$
$m^2 - 6m + 8 = 0$
$m' = 4$ ou $m'' = 2$

$\boxed{m' + m'' = 6}$

Resposta correta: E

10. $\begin{cases} x\,\text{sen}\,a + y\cos a = 0 \\ x\cos a + y\,\text{sen}\,a = 0 \end{cases}$

Se o sistema tem infinitas soluções, as retas são coincidentes, ou diferem de uma constante k.

$\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} = \dfrac{\cos a}{\text{sen}\,a} = k \Rightarrow \text{tg}\,a = \text{cotg}\,a \rightarrow$

$\rightarrow a = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Resposta correta: E

(PÁGINAS 36 E 37)

ATIVIDADES PARA SALA

1. I. Temos o sistema:

$$\begin{cases} ax - 2y + 3y = 0 \\ x + 2y - ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + y = 0 \\ x + (2-a)y = 0 \end{cases}$$

II. $D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & (2-a) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Resposta correta: C

2. I. $3b - 4 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{4}{3}$

II. $2c + 5 = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{5}{2}$

III. $D = \begin{vmatrix} a^3 & 2a \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 0;\ a^3 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a-4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$ (F) ou $a = 4$

IV. $3a + 9b + 4c = 3 \cdot 4 + 9 \cdot \dfrac{4}{3} + 4 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) = 12 + 12 - 10 = 14$

Resposta correta: 14

3. Calculando D:

$$D = \begin{vmatrix} k & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$D = 16k + 9 + 9 - 12 - 9k - 12$

$D = 7k - 6$

Se $k \neq \dfrac{6}{7}$, por exemplo $k = 1$, o sistema será possível e determinado, admitindo uma única solução, $x = y = z = 0$, pois o sistema é homogêneo.

Resposta correta: A

4. Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \times(-3) & \times(-2) \\ 3x + y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -5y-2z=0 \\ -5y-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -5y-2z=0 \end{cases}$$

Considerando $x = \alpha$:

$$\begin{cases} \alpha+2y+z=0 & \times(2) \\ -5y-2z=0 & \end{cases}$$

$2\alpha - y = 0$
$y = 2\alpha$

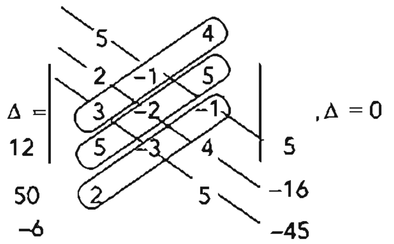
Substituindo na 1ª equação:
$\alpha + 2 \cdot 2\alpha + z = 0$
$z = -5\alpha$

$S = \{(\alpha, 2\alpha, -5\alpha)\}$

Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.



Como $\Delta = 0$, temos o SPI.

Resposta correta: B

2. I. Temos o produto $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim podemos formar o sistema $\begin{cases} x+5y = mx \\ 2x - y = my \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - mx + 5y = 0 \\ 2x - y - my = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-m)x + 5y = 0 \\ 2x - (1+m)y = 0 \end{cases}$$

O determinante principal (Δ) deverá ser zero, pois o sistema é indeterminado, ou seja, há várias soluções.

II. $\begin{vmatrix} (1-m) & 5 \\ 2 & -(1+m) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-m^2) - 10 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{11}$

Resposta correta: E

3. I. Dado o sistema $\begin{cases} (a-1)x + by = 1 \\ (a+1)x + 2by = 5 \end{cases}$. Se a solução é $x = 1$ e $y = 2$, temos:

$$\begin{cases} a - 1 + 2b = 1 \\ a + 1 + 4b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2(-1) \\ a + 4b = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{a} - 2b = -2 \\ \cancel{a} + 4b = 4 \end{cases} +$$

$2b = 2$
$b = 1$
$a = 0$

II. Assim, $a + b = 1$

Resposta correta: B

4. Organizando o sistema:

$$\begin{cases} x - kx + y + z = 0 \\ x + y - ky + z = 0 \\ x + y + z - kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = 0 \\ x + y + (1-k)z = 0 \end{cases}$$

Para o sistema adotar solução diferente de zero, é necessário que $D \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$(1-k)^3 + 1 + 1 - (1-k) - (1-k) - (1-k) = 0$

$\cancel{1} - \cancel{3k} + 3k^2 - k^3 + \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{3k} = 0$
$3k^2 - k^3 = 0$
$k^2(3 - k) = 0$
$k = 0$ ou $k = 3$

Portanto,
$S = 0 + 3 = 3$

Resposta correta: C

5. O sistema é homogêneo, então não pode ser impossível.

$D = \begin{vmatrix} k^2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix}$

$D = k^3 + 1$ Se $k = -1 \Rightarrow$ SPI
$k \neq -1 \Rightarrow$ SPD

$k^3 + 1 = 0$
$k^3 = -1$
$\boxed{k = -1}$

Resposta correta: C

6. Para admitir soluções próprias, ele deve ter mais de uma solução, pois já aceita a solução nula, então $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-2 - k + \cancel{4} - \cancel{4} + 2k + 1 = 0$
$\boxed{k = 1}$

Resposta correta: B

7. Para aceitar mais de uma solução terá de ser SPI.

$D = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$a^2 + a^2 + a^2 - a^3 - 1 - a^3 = 0$

$-2a^3 + 3a^2 - 1 = 0 \quad .(-1)$

$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$

$2a^3 - 2a^2 - a^2 + 1 = 0$

$2a^2(a - 1) - (a^2 - 1) = 0$

$2a^2(a - 1) - (a + 1)(a - 1) = 0$

$(a - 1)[2a^2 - (a + 1)] = 0$

$a - 1 = 0 \quad$ ou $\quad 2a^2 - a - 1 = 0$

$a = 1 \qquad \Delta = 9$

$$a' = \frac{1+3}{2.2} = 1 \quad \text{e} \quad a'' = \frac{1-3}{2.2} = \frac{-1}{2}$$

Portanto:

$$S = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$68.S = 68.\ \frac{1}{2} = \boxed{34}$$

Resposta correta: 34

8. Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 & .(-2) \quad .(-7) \\ 2x - y + 3z = a \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -5y + 5z = a - 6 \\ -10y + 10z = -8 \quad \div(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \left.\begin{aligned} -5y + 5z &= a - 6 \\ -5y + 5z &= -4 \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Se as equações forem iguais, o sistema apresentará infinitas soluções $a - 6 = -4$

$a = 2$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -5y + z = -4 \end{cases}$$

Isolando y:
$-5y + z = -4$
$z = 5y - 4$

$x + 2y - z = 3$
$x + 2y - (5y - 4) = 3$
$x + 2y - 5y + 4 = 3$
$x = 3y - 1$

$S = \{(3y - 1,\ y,\ 5y - 4)\}$

Resposta correta: a = 2 e S = {(3y – 1, y, 5y – 4)}

9.
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

Sistema determinado:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k - 10 - 4 + 5k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

Resposta correta: D

10.
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -3m + 6 - 8 + 12 - 6 + 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$$

Resposta correta: D

Módulo 4

Números Complexos

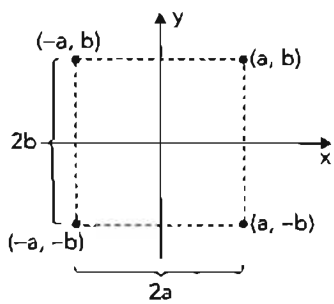
(Páginas 39 e 40)

Atividades para Sala

1. Seja $Z = (m + 2i)(2 - i) = 2m - mi + 4i + 2 =$
$= 2m + 2 + (4 - m)i.$
Devemos ter $2m + 2 = 0 \rightarrow m = -1$
Daí, $4 - m = 4 - (-1) = 5 \rightarrow z = 5i.$

Resposta correta: E

2. Temos $w = a + bi$.
Daí:
$w = (a, b)$
$\bar{w} = (a, -b)$
$-w = (-a, -b)$
$-\bar{w} = (-a, b)$
Graficamente:



Portanto, área = 4ab

Resposta correta: C

3. Devemos ter: $(x + yi)(y + xi) = 4i \rightarrow$
$\rightarrow xy + x^2i + y^2i - xy = 4i \rightarrow x^2 + y^2 = 4.$
Circunferência centrada na origem, de raio 2.

Resposta correta: A

4. Temos A + B = 90°. Daí: (cosA + isenA)(cosB + isenB) =
= (senB + icosB)(cosB + isenB) =
$\cancel{\text{senBcosB}} + i\text{sen}^2B + i\cos^2B - \cancel{\cos B\,\text{sen}B} =$
$= i(\text{sen}^2B + \cos^2B) = i$

Resposta correta: B

5. $A = \begin{bmatrix} (1+i)^{-1} & y \\ i-2 & -2x \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \dfrac{-2x}{1+i} - y(i-2) = 3i$ e

$\det A = 3i \rightarrow \dfrac{-2x(1-i)}{2} - y(i-2) = 3i \rightarrow$

$\rightarrow -x + 2y + (x - y)i = 3i$

Então: $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$. Logo, y = 3 e x = 6.

Daí x + y = 9

Resposta correta: D

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. É dado que $f(x) = \begin{cases} i, \text{ se } x \in \mathbb{R} \\ 1, \text{ se } x \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \end{cases}$

Logo: $f(f(i))^{4p} = f(1)^{4p} = i^{4p} = (i^4)^p = 1^p = 1$

Resposta correta: C

2. Observe que:

I. $4x^2 + 9 = 0$
$4x^2 = -9$
$x^2 = \dfrac{-9}{4}$
$x = \pm\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$
$x = \pm\dfrac{3}{2}i$

II. $y = x' - x''$
$y = \dfrac{3}{2}i - \left(\dfrac{-3}{2}i\right)$
$y = \dfrac{3}{2}i + \dfrac{3i}{2}$
$y = 3i$

III. $z = 2i.\,y$
$z = 2i.\,3i$
$z = 6i^2$
$z = 6.\,(-1)$
$z = -6$
$z^2 = (-6)^2$
$z^2 = 36$

Resposta correta: A

3. $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + \dfrac{1}{Z} = (i^2)^2 + i^2 .\, i + i^2 + i + \dfrac{i}{(i)^2} =$

$= (-1)^2 + (-1) .\, i + (-1) + i + \dfrac{i}{(-1)} = 1 - i - 1 + i - i = -i$

Resposta correta: E

4. $u^2 - v^2 = 6 \rightarrow (u + v)(u - v) = 6$
$\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$
Se $u = a + bi$ e $v = c + di \rightarrow \bar{u} = a - bi$ e $\bar{v} = c - di \rightarrow$
$\rightarrow \bar{u} + \bar{v} = (a + c) - (b + d)i = 1 - i \rightarrow (a + c) = 1$ e $(b + d) = 1$.
Daí:
$u + v = (a + c) + (b + d)i = 1 + i$, assim,
$(1 + i)(u - v) = 6 \rightarrow u - v = \dfrac{6}{1+i} = \dfrac{6(1-i)}{2} = 3 - 3i$

Resposta correta: D

5. $\dfrac{\overline{1-i}}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \cdot \dfrac{(1+i)}{(1+i)} = \dfrac{1+i+i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$

Resposta correta: D

6. Efetuando a potenciação:

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{1}{(1+3i)^2}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{1}{1+6i+9i^2}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{1}{1+6i+9(-1)}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{1}{-8+6i}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{1}{(-8+6i)} \dfrac{(-8-6i)}{(-8-6i)}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{-8-6i}{(-8)^2-(6i)^2}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{-8-6i}{64+36}$

$(1 + 3i)^{-2} = \dfrac{-8}{100} - \dfrac{6i}{100}$

$(1 + 3i)^{-2} = -0{,}08 - 0{,}06i$

Resposta correta: C

7. Simplificando:

$\dfrac{7+3i}{1-i} + \dfrac{3-5i}{1+i} = \dfrac{(7+3i)(1+i)+(3-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \dfrac{7+7i+3i+3i^2+3-3i-5i+5i^2}{1-i^2}$

$= \dfrac{7+10i+\cancel{3(-1)}+\cancel{3}-8i+5(-1)}{1-(-1)}$

$= \dfrac{2+2i}{2}$

$= 1 + i$

Resposta correta: B

8. Como i é raiz, então P(i) = 0:
$P(i) = 2i^3 - i^2 + a.\, i + b$
$0 = 2(-i) - (-1) + a + b$
$-1 + 2i = a + b$

Igualando as partes reais e imaginárias, teremos a = –1 e b = 2, portanto, a . b = –2

Resposta correta: A

9. Do quociente $\frac{x-i}{1-2i}$, temos:

I. $\frac{x-i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{x+2xi-i-2i^2}{(i)^2-(2i)^2} = \frac{x+(2x-1)i+2}{1+4} =$

$= \boxed{\frac{(x+2)}{5} + \frac{(2x-1)\,i}{5}}$

II. Para um número ser real, temos que sua parte imaginária seja zero. Assim, temos:
$\frac{2x-1}{5} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Resposta correta: D

10. $S_n = na_1 + (n-1)_r \to S_{100} = 100(-99 + i) + 99(1 + i) \to$
$\to S_{100} = -99 \,.\, 99 + 100 \,.\, 99i$

11. $Z^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$
Logo:
$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{2i}{-4i^2} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}$

Resposta correta: C

12. $S = 1 + 2i + 3i^2 + ... + (n + 1)i^n,\ i = \sqrt{-i}$

$$\text{Temos: } \begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1, \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{cases}$$

as potências se repetem em grupos de quatro elementos.
$S = [1 + 5 + ... + (n - 3)] + [2i + 6i + ... + (n - 2)i] -$
$- [3 + 7 + ... + (n - 1)] - [4i + 8i + ... + ni] + (n + 1)$
Podemos reescrever como somatória.

$$S = \sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}(4k-3) + i\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}(4k-2) - \sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}(4k-1) - i\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}(4k) + (n+1)$$

$$S = \cancel{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} 4k} - 3.\frac{n}{4} + i\cancel{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} 4k} - 2i\frac{n}{4} - \cancel{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} 4k} + 1.\frac{n}{4} - i\cancel{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} 4k} + (n+1)$$

$$S = -\frac{3n}{4} - \frac{2in}{4} + \frac{n}{4} + \frac{4n+4}{4} = \frac{2n-2ni+4}{4} = \frac{n-ni+2}{2}$$

Resposta correta: C

13. Se z = 3 + 2i é raiz, então o seu conjugado $\bar{z} = 3 - 2i$ é outra raiz. Utilizando uma das relações de Girard:
$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$

$x_1 + 3 + \cancel{2i} + 3 - \cancel{2i} = \frac{-(-7)}{1}$

$x_1 = 1$
$S = \{3 \pm 2i, 1\}$
A raiz real é 1.

Resposta correta: A

14. Se 2 + i é raiz, então 2 – i também é raiz, sabemos ainda que a soma das raízes é dada por $-\frac{b}{a}$:

$x_1 + x_2 + x_3 = - - \frac{(-14)}{3}$

$2 + i + 2 - i + x_3 = \frac{14}{3}$

$x_3 = \frac{14}{3} - 4$

$x_3 = \frac{2}{3}$

Resposta correta: C

15. Se x = 2 + 3i é raiz, então o conjugado também é raiz x = 2 – 3i. Pelas relações entre as raízes, teremos:

I. $x' + x'' = \frac{-b}{a}$

$2 + 3i + 2 - 3i = \frac{-b}{1}$

$4 = -b$
$b = -4$

II. $x' . x'' = \frac{c}{a}$

$(2 + 3i)(2 - 3i) = \frac{c}{1}$

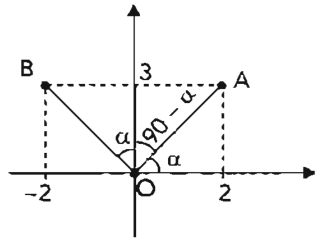
$4 - 9i^2 = c$
$c = 13$

Resposta correta: B

(PÁGINAS 41 E 42)

ATIVIDADES PARA SALA

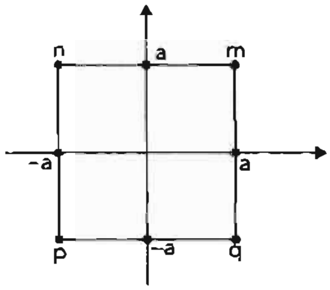
1. Temos Z = 3 + 2i e Zi = 3i – 2, então:



Observe que $\overline{OA} = \overline{OB}$ e que $B\hat{O}A = \alpha + 90° - \alpha = 90°$
Logo, AOB é retângulo e isósceles.

Resposta correta: C

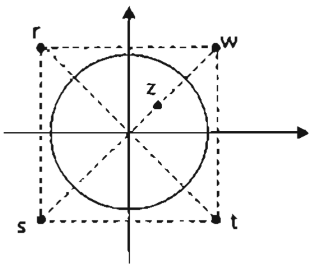
2. Seja 2a o lado do quadrado.



Daí, m = a + ai, n = –a + ai, p = –a – ai e q = a – ai.
Logo: m + n + p + q = a + ai –a + ai – a – ai + a – ai = 0.

Resposta correta: B

3. Dados os números complexos r, w, t, s e percebemos que w = kz, pois está na mesma linha.



Se Z = a + bi → w = ka + kbi.
Assim, t = ka – kbi, r = –ka + kbi e s = –ka – kbi, em que $k \in \mathbb{R}^*_+$.
Temos,

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1(a-bi)}{a+bi(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right).(a-bi)$$

Observe que $\frac{1}{Z}$ é múltiplo de (a – bi). Como **t** é um múltiplo de (a – bi), basta fazermos $k=\frac{1}{a^2+b^2}$ e teremos $\frac{1}{Z}=t$.

Resposta correta: E

4. Temos a P.G. de razão 2 e a_1 sendo ímpar.
Assim, $a_n = 2^{n-1} . a_1$. Se n ≥ 3, podemos escrever $a_n = 4k$, pois a_n será múltiplo de 4.
Também $a_2 = 4k + 2$ e $a_1 = 4k + 1$ ou $4k + 3$.
Assim, $i^{a_3}+...+i^{a_{10}}=i^{4k_1}+...+i^{4k_8}=$

$$=\left(i^4\right)^{k_1}+...+\left(i^4\right)^{k_8}=1^{k_1}+...+1^{k_8}=8$$

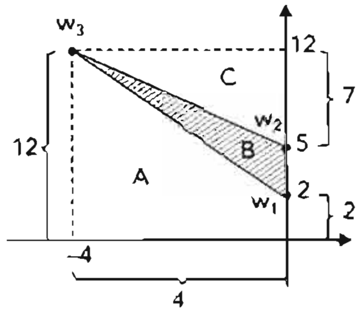
Também: $i^{a_2}=i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=1-i^2=-1$

E: $i^{a_1}=i^{4k+1}=i^{4k}.i^1$ ou $i^{a_1}=i^{4k+3}=-i$

Daí, $i^{-a_1}+...+i^{a_{10}}=7+i$ ou $7-i$

Resposta correta: E

5.



$Z_1 = 2 \to w_1 = iZ_1 = 2i$
$Z_2 = 5 \to w_2 = iz_2 = 5i$
$Z_3 = 6 + 2i \to w_3 = 12i - 4$
Temos, A + B + C = 4 . 12 = 48

Também, $A=\frac{(12+2).\,4}{2}=28$ e $C=\frac{7\,.\,4}{2}=14$

Então, A + C = 42. Assim, B = 6.

Resposta correta: B

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Temos $(z-i)(\overline{z-i})=4$. Tomando z = a + bi:
$(a+bi-i)(\overline{a+bi-i})=4 \to (a+(b-1)i)(a-(b-1)i)=4 \to$
$\to a^2+(b-1)^2=4 \to$ circunferência de raio 2, centrada em (0, 1).

Resposta correta: B

2. Temos z = cost + isent. Então: 1 + z = 1 + cost + isent =

$$=1+\left(\cos^2\frac{t}{2}-\text{sen}^2\frac{t}{2}\right)+i\left(2\text{sen}\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$2\cos^2\frac{t}{2}+2i\text{sen}\frac{t}{2}\,.\,\cos\frac{t}{2}=2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\text{sen}\frac{t}{2}\right).$$

Também, $1-z=1-\cos t-i\text{sen}t=1-\left(\cos^2\frac{t}{2}-\text{sen}^2\frac{t}{2}\right)-$

$$-i\,.2\text{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2\text{sen}^2\frac{t}{2}-2i\text{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=$$

$$2\text{sen}\frac{t}{2}\left(\text{sen}\frac{t}{2}-i\cos\frac{t}{2}\right).$$

Portanto, $$\frac{1+z}{1-z}=\frac{2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\text{sen}\frac{t}{2}\right)}{2\text{sen}\frac{t}{2}\left(\text{sen}\frac{t}{2}-i\cos\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=\cot g\frac{t}{2}\,.\,\frac{\left(\cos\frac{t}{2}+i\text{sen}\frac{t}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{t}{2}+i\cos\frac{t}{2}\right)}{\left(\text{sen}\frac{t}{2}-i\cos\frac{t}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=\cot g\frac{t}{2}\,.\,\frac{\cos\frac{t}{2}\,.\,\cancel{\text{sen}\frac{t}{2}}+i\cos^2\frac{t}{2}+i\text{sen}^2\frac{t}{2}-\cancel{\text{sen}\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}}{\text{sen}^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}=$$

$$i\cot g\frac{t}{2}.$$

Resposta correta: A

3. Seja $z = a + bi$. Temos $|z|^2 = \overline{2+z} \rightarrow a^2 + b^2 = 2 + a - bi \rightarrow$
$\rightarrow a^2 + b^2 = 2 + a$ e $0 = -bi \rightarrow b = 0$.
Logo, $a^2 + b^2 = 2 + a \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = -1$ ou $a = 2$.
Daí, $z = -1$ ou $z = 2$.
Obs.: Se tomarmos $z^2 = \overline{2+z} \rightarrow a^2 - b^2 + 2abi =$

$$= 2 + a - bi \rightarrow \begin{cases} 2ab = -b \rightarrow a = -\dfrac{1}{2} \\ a^2 - b^2 = 2 + a \rightarrow b^2 < 0 \end{cases}$$

Resposta correta: Não tem solução real

4. $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i \rightarrow (2i)^n + [(1+i)^2]^n = -16i \rightarrow$
$\rightarrow (2i)^n + (\cancel{1} + 2i - \cancel{1})^n = -16i \rightarrow 2 \,.\, (2i)^n = -16i \rightarrow$
$\rightarrow 2^{n+1} \,.\, i^n = -16i \rightarrow 2^{n+1} = 16$ e $i^n = -i$.
Logo: $n = 3$.

Resposta correta: B

5. $$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{94} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{94}}{\left[(1+i)^2\right]^{47}} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{94}}{(1+2i-1)^{47}} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{94}}{2^{47} \,.\, i^{47}} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

Como $47 = 44 + 3 = 4 \,.\, 11 + 3 \rightarrow$
$\rightarrow i^{47} = (i^4)^{11} \,.\, i^3 = 1 \,.\, (-i) = -i$.

Temos, $\dfrac{\cancel{2^{47}}}{\cancel{2^{47}} \,.\, (-i)} \cdot \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1+i) \,.\, i}{(-i \,.\, i) \,.\, \sqrt{2}} = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$

Resposta correta: A

6. $(x + 3i) - (1 - yi) = -6i$
$x + 3i - 1 - yi = -6i$
$x - 1 + (3 - y)\, i = -6i$

Igualando as partes reais e imaginárias:

I. $x - 1 = 0$
$x = 1$

II. $3 - y = -6$
$-y = -9$
$y = 9$

Portanto:
$|x - y| = |1 - 9| = 8$

Resposta correta: C

7. Fazendo $Z = a + bi$ e aplicando a propriedade distributiva, temos:
$(3 - i) \,.\, z + (1 + i)^2 + 8 - i = 18 + 11i$
$(3 - i) \,.\, (a + bi) + 1 + 2i + i^2 + 8 - i = 18 + 11i$
$3a + 3bi - ai - bi^2 + 1 + 2i - 1 + 8 - i = 18 + 11i$
$3a + b + 8 + (3b - a + 1)i = 18 + 11i$
Igualando, temos:

$$\begin{cases} 3a + b + 8 = 18 \\ -a + 3b + 1 = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -a + 3b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 10 \\ -3a + 9b = 30 \end{cases}$$

$10b = 40 \rightarrow b = 4$

Substituindo $3a + b = 10 \rightarrow 3a + 4 = 10 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow$
$\rightarrow a = 2$. Logo: $Z = 2 + 4i$.

8. $x^3 + px^2 + x + q = 0$, como $x = i$ é raiz
$i^3 + p \,.\, i^2 + i + q = 0$
$-\cancel{i} + p\,(-1) + \cancel{i} + q = 0$
$-p + q = 0 \qquad x\,(-1)$
$p - q = 0$

Resposta correta: C

9. Se $x = 2 + 3i$ é raiz, então o conjugado $x = 2 - 3i$ também é raiz. Observe também que $x = 0$ é raiz. Pelas relações entre as raízes:

I. $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-b}{a}$

$2 + \cancel{3i} + 2 - \cancel{3i} + 0 = \dfrac{-b}{a}$

$b = -8$

II. $x_1 \,.\, x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$

$(2 + 3i)\,(2 - 3i) + \cancel{(2+3i)} \,.\, 0 + \cancel{(2-3i)} \,.\, 0 = \dfrac{c}{2}$

$4 - 9i^2 = \dfrac{c}{2}$

$4 + 9 = \dfrac{c}{2}$

$c = 26$

Portanto:
$P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$
$P(x) = 2x^3 + 8x^2 + 26x$
$P(1) = 2.1^3 + 8.1^2 + 26.1$
$P(1) = 20$

Resposta correta: 20

10. Aplicando uma das propriedades de módulo:

$P(3 + i) = 2 - 4i$

$P\left(\overline{3+i}\right) = \overline{2-4i}$

$P(3 - i) = 2 + 4i$

Resposta correta: 2 + 4i

11. $P(x) = 1x^3 + bx^2 + cx + d$, sabendo que $x = 1 + 2i$ é raiz, o seu conjugado $x = 1 - 2i$ também é raiz, sabemos que:

I. $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-b}{a}$

$0 + \cancel{1} + 2i + \cancel{1} - 2i = \dfrac{-b}{1}$

$\boxed{b = -2}$

II. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$

$0\,\cancel{(1+2i)} + 0\,\cancel{(1-2i)} + (1 + 2i)(1 - 2i) = \dfrac{c}{1}$

$1 - 4i^2 = c$

$\boxed{c = 5}$

III. $x_1\, x_2\, x_3 = \dfrac{-d}{a}$

$0.\,(1 + 2i)\,(1 - 2i) = \dfrac{-d}{1}$

$\boxed{d = 0}$

Portanto:
$P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 0$
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Resposta correta: C

12. $\dfrac{1+2i}{2+ai} + ai^2$

$\dfrac{(1+2i)}{(2+ai)}\dfrac{(2-ai)}{(2-ai)} + a\,.\,(-1)$

$\dfrac{2-ai+4i-2ai^2}{2^2-a^2i^2} - a$

$= \dfrac{2-ai+4i+2a(-1)}{4-a^2(-1)} - a$

$= \dfrac{2+2a+(4-a)\,i}{4+a^2} - a$

Real $\Rightarrow$ Parte imaginária = 0
$4 - a = 0$
$\boxed{a = 4}$

Resposta correta: 4

13. Dados os números z_1, z_2 e z_3, temos:
I. $z_1 = 2 + 3i \Rightarrow \overline{z_1} = 2 - 3i$

II. $z_2 = 5 + 7i \Rightarrow \overline{z_2} = 5 - 7i$

III. $z_3 = 3 - 5i \Rightarrow \overline{z_3} = 3 + 5i$

Então a expressão $z_1\,.\,\overline{z_2} + z_2\,.\,\overline{z_3} - \overline{z_1}\,.\,z_3$, temos:
IV. $z_1\,.\,\overline{z_2} = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 + i + 21 \Rightarrow \boxed{z_1\,.\,\overline{z_2} = 31 + i}$

V. $z_2\,.\,\overline{z_3} = (5 + 7i)(3 + 5i) = 15 + 25i + 21i + 35i^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 15 + 46i - 35 \Rightarrow \boxed{z_2\,.\,\overline{z_3} = -20 + 46i}$

VI. $\overline{z_1}\,.\,z_3 = (2 - 3i)(3 - 5i) = 6 - 10i - 9i + 15i^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 19i - 15 \Rightarrow \boxed{z_1\,.\,\overline{z_3} = -9 - 19i}$

VII. Assim a expressão $z_1\,.\,\overline{z_2} + z_2\,.\,\overline{z_3} - \overline{z_1}\,.\,z_3$ fica:
$31 + i - 20 + 46i + 9 + 19i = \boxed{20 + 66i}$

Resposta correta: A

14. Considere o número $z = 3 + 4i$. Assim, temos, por definição:
I. $\sqrt{3+4i} = a + bi \Rightarrow 3 + 4i = a^2 + 2abi + b^2i^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow 3 + 4i = (a^2 - b^2) + 2abi$

Portanto:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow \boxed{b = \dfrac{2}{a}} \end{cases}$$

II. Substituindo, temos:
$a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \Rightarrow a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \begin{cases} a' = 2 \\ a'' = -2 \end{cases}$

III. Onde vem:
$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \boxed{2+i} \\ a = -2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow -2-i = \boxed{-(2+i)} \end{cases}$$ Raízes opostas

Resposta correta: B

(PÁGINA 44)

ATIVIDADES PARA SALA

1. A soma de quatro potências consecutivas de i é igual a zero:
Observe que cada soma começa por uma potência que possui expoente múltiplo de 4.
$1 + i + i^2 + i^3 = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 0$
$i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = 0$
$i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} = 0$
....
$i^{2000} + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} = 0$. Assim:
$S = \underbrace{1 + i + i^2 + \ldots + i^{2003}}_{\text{zero}} + \underbrace{i^{2004} + i^{2005} + i^{2006} + i^{2007}}_{\text{zero}}$
$S = 0$

Resposta correta: A

2. a) $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = [1 + 2i + i^2]^{10} = [1 + 2i - 1]^{10} =$
$= [2i]^{10} = 2^{10}\,.\,i^{10} = 1024\,.\,(-1) = -1024$

b) $(1 - i)^{21} = (1 - i)^{20}\,.\,(1 - i) = [(1 - i)^2]^{10} = (1 - i) =$
$= [1 - 2i + i^2]^{10}\,.\,(1 - i) = [-2i]^{10}\,.\,(1 - i) =$
$= (-2)^{10}\,.\,i^{10}\,.\,(1 - i) = 1024\,.\,(-1)(1 - i) =$
$= -1024\,(1 - i) = -1024 + 1024i$

3. a) $Z^3 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 . \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z^3 = \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}i}{2} - \dfrac{3}{4}\right) . \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z^3 = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) . \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z^3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i + \dfrac{3}{4} \rightarrow z^3 = \dfrac{4}{4} = 1$

b) $Z^{90} = (z^3)^{30} = (1)^{30} = 1$

4. $x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Então:

$$\begin{cases} x = \cos 120° + i\,\text{sen}120° = \text{cis}120° \\ y = \cos 240° + i\,\text{sen}240° = \text{cis}240° \end{cases}$$

Logo:

$x^5 + y^5 = \text{cis}(1500°) + \text{cis}(1200°) = \text{cis}(240°) + \text{cis}(120°) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -1$

$x^7 + y^7 = \text{cis}(840°) + \text{cis}(1680°) = \text{cis}(120°) + \text{cis}(240°) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -1$

$x^9 + y^9 = \text{cis}(1080°) + \text{cis}(2160°) = \text{cis}(360°) + \text{cis}(0°) =$

$= 1 + 1 = 2$

Resposta correta: C

5. Seja a P.G. 2i, -2, ... A razão $q = \frac{-2}{2i} = \frac{-2i}{-2} = i$

$S_{13} = 2_i - 2 - 2_i + 2 + 2_i - 2$ ... os termos se repetem de quatro em quatro:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 0$

Daí, $S_{13} = a_{13} = 2i$.

Resposta correta: B

6. $p(x) = 3x^7 - 4x^5 + 6x^4 - x^3 + 2i \rightarrow$

$\rightarrow p(i) = 3 \cdot i^7 - 4 \cdot i^5 + 6\,i^4 - i^3 + 2i =$

$= 3 \cdot i^4 \cdot i^3 - 4 \cdot i^4 \cdot i + 6i^4 - i^3 + 2i$

Sabemos que $i^4 = 1$, $i^3 = -i \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = -3i - 4i + 6 + i + 2i = 6 - 4i$.

Resposta correta: E

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Dividindo 100 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 4 \\ \hline 20 & 25 \\ (0) & \end{array}$$

$i^{100} = i^0 = 1$

Resposta correta: B

2. Dividindo o expoente 97 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 97 & 4 \\ \hline 17 & 24 \\ (1) & \end{array}$$

$i^{97} = i^1 = i$

Resposta correta: B

3. Só é necessário dividir os dois últimos algarismos:

$$\begin{array}{r|l} 34 & 4 \\ \hline (2) & 8 \end{array}$$

$i^{1234} = i^2 = -1$

Resposta correta: C

4. $i^{-2255} = \frac{1}{i^{2255}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{(-i)}{(i)} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$

Resposta correta: D

5. Sabemos que a soma de quatro potências consecutivas de i dá sempre igual a zero.

$1 + i + i^2 + i^3 = 0$

$i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = 0$

$i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} = 0 \quad \oplus$

$i^{996} + i^{997} + i^{998} + i^{999} = 0$

$1 + i + i^2 + ... + i^{999} = 0$

Observe que a soma começa sempre num múltiplo de 4, inclusive em $1 = i^0$.

Resposta correta: A

6. Da mesma maneira da anterior:

$i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = 0 \quad \oplus$

...

$i^{73} + i^{74} + i^{75} + i^{76} = 0$

$i + i^2 + i^3 + ... + i^{76} = 0$

A soma sempre termina num múltiplo de 4.

Calculando a soma que se pede:

$i + i^2 + i^3 + ... + i^{76} + i^{77} = 0 + i^{77}$

$= i^{77}$

$= i^1$

$= i$

$$\begin{array}{r|l} 77 & 4 \\ \hline (1) & 19 \end{array}$$

Resposta correta: D

7. $i^0 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline (2) & 2 \end{array} \rightarrow i^{10} = i^2 = -i$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 4 \\ \hline (0) & 25 \end{array} \rightarrow i^{10^2} = i^{100} = i^0 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 4 \\ \hline (0) & 250 \end{array} \rightarrow i^{10^3} = i^{1000} = i^0 = 1$$

A partir de 10^2, todas as potências de 10, quando divididas por 4, terão resto zero:

$S = i + i^{10} + i^{10^2} + ... + i^{10^n}$

$S = \cancel{i} - \cancel{i} + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-1\,\text{vezes}}$

$S = (n - 1) \cdot 1$

$S = n - 1$

Resposta correta: D

8. Seja $x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$ que admite uma raiz real.
$x^2 + xa + xbi + c + di = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + xa + c = 0$ e $xb + d = 0 \rightarrow x = -\dfrac{d}{b}$
Substituindo $\dfrac{d^2}{b^2} - \dfrac{d}{b} \cdot a + c = 0 \rightarrow$
$\rightarrow d^2 - bda + b^2c = 0 \rightarrow d^2 + b^2c = bda.$

Resposta correta: E

9. Sabemos que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ e $i^{4k+3} = -i$
Seja $S = i + i^2 + ... + i^n$
Se $n = 4k$: $S = (i + 1 - 1 - i) + ... + (i + 1 - 1 - i) = 0$
Se $n = 4k + 1$: $S = (i + 1 - 1 - i) + ... + (i + 1 - i - 1) + i = i$
Se $n = 4k + 2$: $S = (1 + i - 1 - i) + ... + (i + 1 - i - 1) - 1 = -1$
Se $n = 4k + 3$: $S = (1 + i - 1 - i) + ... + (i + 1 - i - 1) - i = -i$
Daí, $S = 0$ se, somente se, n é múltiplo de 4.

Resposta correta: B

10. $\dfrac{1+i\text{tg}\alpha}{1-i\text{tg}\alpha} = \dfrac{(1+i\text{tg}\alpha)(1+i\text{tg}\alpha)}{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-\text{tg}^2\alpha + 2\text{tg}\alpha \cdot i}{1+\text{tg}^2\alpha} =$

$$= \dfrac{\dfrac{\cos^2 - \text{sen}^2\alpha}{\cancel{\cos^2}\alpha}}{\dfrac{\cos^2 + \text{sen}^2\alpha}{\cancel{\cos^2}\alpha}} + \dfrac{2 \cdot \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \cdot i = \dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1} +$$

$$+2\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos^2\alpha}{1} \cdot i$$

$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha \cdot i = \cos 2\alpha + \text{sen}2\alpha \cdot i$

Resposta correta: A

11. $z = \left(\dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2}\right) + i$ deve ser imaginário puro.
Logo: $\dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \rightarrow k = 1$
Daí, $k + z^{2006} = 1 + (i)^{2006} = 1 + i^{4 \cdot 501 + 2} =$
$= 1 + (i^4)^{501} \cdot i^2 = 1 + 1^{501} \cdot i^2 = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$

Resposta correta: D

12. $z = \sqrt{5 + 12i}$. Seja $z = a + bi \rightarrow (a + bi)^2 = 5 + 12i \rightarrow$
$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i \rightarrow a^2 - b^2 = 5$ e $2ab = 12 \rightarrow$
$ab = 6 \rightarrow a^2b^2 = 36.$
Substituindo $a^2 = 5 + b^2 \rightarrow (5 + b^2) \cdot b^2 = 36 \rightarrow$
$\rightarrow b^4 + 5b^2 - 36 = 0.$
Resolvendo $\Delta = 169 \rightarrow b^2 = -\dfrac{5 \pm 13}{2} \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = \pm 2$
Se $b = 2 \rightarrow a = 3$
Se $b = -2 \rightarrow a = -3$
Daí, $z = 3 + 2i$ ou $-3 - 2i$

Resposta correta: A

13. Temos $x^3 = 27$ que possui três raízes: $a + bi$, $a - bi$ e 3.
Sabemos que se r_1, r_2 e r_3 são raízes: $r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{B}{2A} = 0$
$\rightarrow a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi} + 3 = 0 \rightarrow 2a = -3 \rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$
Logo: Real (r_1) = Real$(r_2) = -\dfrac{3}{2}$
A soma dos módulos da parte real é:
$|3| + 2|a| = 3 + 2\left|-\dfrac{3}{2}\right| = 6$

Resposta correta: D

14. $(1 + i)^n = (1 - i)^n$. Analisando n em função dos múltiplos e 4.
Se $n = 4k$: $(1 + i)^{4k} = [(1 + i)^2]^{2k} = (1 + 2i - 4) = (2i)^{2k} =$
$= 2^{2k} \cdot i^{2k} = 2^{2k}(-1)^k$
Analogamente: $(1 - i)^{4k} = (-2i)^{2k} = 2^{2k} \cdot (-1)^k$
Se $n = 4k + 1$: $(1 + i)^{4k+1} = (1 + i)^{4k} \cdot (1 + i) = 2^{2k}(-1)^k(1 + i)$
$(1 - i)^{4k+1} = (1 + i)^{4k}(1 - i) = 2^{2k}(-1)^k(1 - i)$
Se $n = 4k + 2$: $(1 + i)^{4k+2} = (1 + i)^{4k}(1 + i)^2 = 2^{2k} \cdot (-1)^k \cdot (2i)$
$(1 - i)^{4k+2} = (1 + i)^{4k}(1 - i)^2 = 2^{2k}(-1)^k(-2i)$
Se $n = 4k + 3$: $(1 + i)^{4k+3} = (1 + i)^{4k}(1 + i)^3 = 2^{2k}(-1)^k$
$\cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = 2^k(-1)^k \cdot (2i)(1 + i) =$
$= 2^{2k}(-1)^k(2i - 2)$
$(1 - i)^{4k+3} = (1 - i)^{4k}(1 - i)^3 = 2^{2k}(-1)^k(1 - i)^2(1 - i)$
$= 2^{2k}(-1)^k(-2i)(1 - i) =$
$= 2^{2k}(-1)^k(-2i + 2)$
Observamos que só existe igualdade quando u = 4k, ou seja, múltiplo de 4. Das opções dadas, n = 2004.

Resposta correta: D

(PÁGINAS 46 E 47)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Seja $P(x, y) \rightarrow z = x + yi$, pois P é afixo de z.
Temos que $z = \rho\text{cis}\theta$ e $\theta = 60° \rightarrow z = \rho \cdot \dfrac{1}{2} + \rho\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
Então, $x = \dfrac{\rho}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}\rho}{2}$. Sabendo que $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{\rho^2}{4} + \dfrac{3}{4}\rho^2 = 9 \rightarrow \rho^2 = 9 \rightarrow \rho = \pm 3 \rightarrow \rho = 3$, pois é módulo.
Daí, $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

Resposta correta: B

2. Seja $a = \begin{vmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{sen}\theta \cdot 1 - 0 \cdot \cos\theta = \text{sen}\theta$ e
$b = \begin{vmatrix} \text{sen}\theta & -\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{sen}\theta \cdot 0 - 1\,(-\cos\theta) = \cos\theta$
Assim, $z = a + bi = \text{sen}\theta + \cos\theta - c$
$|z| = a^2 + b^2 = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Resposta correta: C

3. Seja $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$, então $z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi +$
$+ 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y3i =$
$= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 1 + i$

Podemos escrever $1 + i = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\ -\text{cis}45°$

Então, $z^3 = \sqrt{2}\ .\ \text{cis}45°$ mas $z^3 = |z|^3 .\ \text{cis}(3\alpha)$,
logo, $|z|^3 = \sqrt{2} \to |z| = \sqrt[6]{2}$

Resposta correta: B

4. Seja $z = x + yi$ e $z = \rho\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \to$

$\to z = \rho\frac{\sqrt{2}}{2} + \rho\frac{\sqrt{2}}{2}i \to x = \rho\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \rho\frac{\sqrt{2}}{2}$

Se $y = x^2 \to x = x^2 \to x^2 - x = 0 \to x(x-1) = 0 \to$
$\to x = 0$ ou $x = 1$.

Como $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \to x \neq 0 \to x = 1$

Se $x = 1 \to y = 1$
Daí: $z = i + 1$

Resposta correta: A

5. $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{10}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{20}.\frac{1}{2^{10}}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10} =$

$2^{20}.\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10} = 2^{20}.(\text{cis}300°)^{10} = 2^{20}.\ \text{cis}(3000°) =$

$2^{20}.\ \text{cis}(120°)$.

Como a é o módulo de $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^{10}$, então $a = 2^{20}$.

Da igualdade $(4a)^x = a \to (4\ .\ 2^{20})^x = 2^{20} \to 2^{22x} = 2^{20} \to$

$\to x = \frac{20}{22} \to x = \frac{10}{11}$

Resposta correta: A

Atividades Propostas

1. $Z = |Z|(\cos\theta + i\ .\ \text{sen}\theta)$
$Z = 4(\cos 75° + i\ .\ \text{sen}75°)$
Logo: $|z| = 4$

Resposta correta: C

2. $Z = 3 + 5i$

$|Z| = \sqrt{(3)^2+(5)^2} \to |Z| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

Resposta correta: D

3. $Z = x + 3i$

$|Z| = \sqrt{x^2+3^2}$, como $|Z| = 5$

$5 = \sqrt{x^2+9}$

$5^2 = \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2$

$25 = x^2 + 9$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Resposta correta: B

4. $Z = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$|Z| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

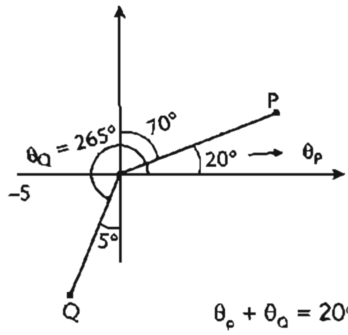
$|Z| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}$

$|Z| = 1$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\theta &= \frac{1/2}{1} = 1/2 \\ \cos\theta &= \frac{-\sqrt{3}/2}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\}\ \theta = 150°$$

Resposta correta: E

5.



$\theta_P = 20°$
$\theta_Q = 265°$

$\theta_P + \theta_Q = 20° + 265° = 285°$

Resposta correta: E

6. Temos $z_k = a_k + ib_k$, de modo que $|z_k| = 2 \to \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2$.

Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma P.A. de razão $-\frac{1}{5}$ e soma 9:

$S_6 = 9$. Como $S_n = na_1 + \frac{n(n-r)}{2}r \to$

$\to S_6 = 6a_1 + \frac{6(5)}{2}.\left(-\frac{1}{5}\right) \to 9 = 6a_1 - 3 \to 6a_1 = 12 \to$

$\to a_1 = 2$

Assim: $a_3 = a_1 + 2r = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

Logo, $b_3^2 = 4 - a_3^2 \to b^2 = \frac{36}{25} \to b = \frac{6}{5}$, pois $b > 0$

Portanto, $z_3 = \frac{8}{5} + \frac{6i}{5}$

Resposta correta: B

7. Temos $z = x + yi$ e $a = c + bi$, sabemos que:

$z\ .\ \bar{z} = |z|^2 \to \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)\overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)} = \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}\right) =$

$= \frac{z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z}}$. Mas $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1$

$\to z\bar{z} - \cancel{z\bar{a}} - \cancel{a\bar{z}} + a\bar{a} = 1 - \cancel{a\bar{z}} - \cancel{a\bar{z}} + a\bar{a}z\bar{z} \to$

$\to z\bar{z} + a\bar{a} - 1 - a\bar{a}z\bar{z} = 0 \to z\bar{z} - 1 + a\bar{a}(1 - z\bar{z}) = 0 \to$

$\to (z\bar{z} - 1)(1 - a\bar{a}) = 0 \to z\bar{z} = 1$ ou $a\bar{a} = 1$, ou seja,

$|z|^2 = 1$ ou $|a|^2 = 1$. Mas é dito que $|a| < 1$, logo $|z|^2 = 1 \to$
$\to |z| = 1 \to x^2 + y^2 = 1$, que é uma circunferência de raio unitário centrada na origem.

Resposta correta: A

8. Seja $z = a + bi$ e $|z| - z = 1 + 2i \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1 + 2i \rightarrow \sqrt{a^2+b^2} - a = 1$ e
$-bi = 2i \rightarrow b = -2$.
Substituindo na anterior:
$\sqrt{a^2+4} - a = 1 \rightarrow \sqrt{a^2+4} = 1 + a \rightarrow \cancel{a^2} + 4 = 1 + 2a + \cancel{a^2} \rightarrow$
$\rightarrow 2a = 3 \rightarrow a = \dfrac{3}{2}$
Logo, $z = \dfrac{3}{2} - 2i \rightarrow S = \left\{\dfrac{3}{2} - 2i\right\}$

Resposta correta: A

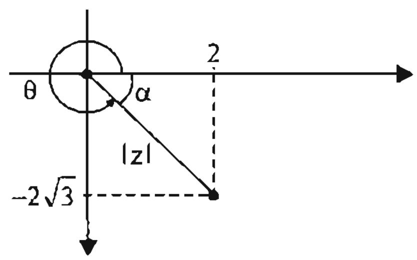
9. **1ª Solução:**
Note que a parte real é 2 e a parte imaginária é $-2\sqrt{3}$, então:

$|Z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2}$
$|Z| = \sqrt{4+12}$
$|Z| = \sqrt{16}$
$|Z| = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = 300°$$

Sabemos que a forma trigonométrica é dada por
$Z = |Z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
$Z = 4(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)$

2ª Solução:
Podemos retirar o módulo e o argumento do próprio plano:



$|Z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2}$ $\quad\cos\alpha = \dfrac{2}{4}$

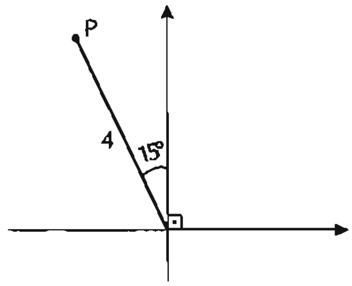
$|Z| = \sqrt{16}$ $\quad\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$|Z| = 4$ $\quad\alpha = 60°$

$\theta = 360° - \alpha$
$\theta = 300°$
$Z = |Z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$
$Z = 4(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)$

Resposta correta: A

10. Observe que $|Z| = 4$ e $\theta = 15° + 90° = 105°$



Portanto:
$Z = |Z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$
$Z = 4(\cos 105° + i\,\text{sen}\,105°)$
$Z = 4 \cdot \left[\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot i\right]$
$Z = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\,i$

Obs.:
I. $\cos 105° = -\cos 75° = -\cos(30° + 45°) =$
$-(\cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen}\,30° \cdot \text{sen}\,45°) = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

II. $\text{sen}\,105° = +\,\text{sen}\,75° = \text{sen}(30° + 45°) =$
$\text{sen}\,30° \cdot \cos 45° + \text{sen}\,45° \cdot \cos 30° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Resposta correta: B

11. I. Se z_1 e z_2 são raízes conjugadas, então podemos escrever: $z_1 = x + yi$ e $z_2 = x - yi$.

II. Da equação $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, temos:
- $\underbrace{z_1 + z_2}_{} = (x + yi) + (x - yi)$

$-\dfrac{b}{a} = 2x \Rightarrow \cancel{2}a = \cancel{2}x \Rightarrow \boxed{x = a}$

- $\underbrace{z_1 \cdot z_2}_{} = (x + yi)(x - yi)$

$\dfrac{c}{a} = x^2 - (yi)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + y^2$

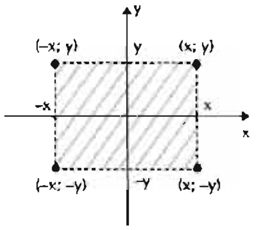
Como $x = a$, temos:
$\cancel{a^2} + b^2 = \cancel{a^2} + y^2 \Rightarrow \boxed{y = b}$

III. Então temos: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = a - bi$.
$$\left.\begin{array}{l} |z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |z_2| = \sqrt{a^2+(-b)^2} \end{array}\right\} \oplus$$
$$\boxed{|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Resposta correta: C

12. I. Temos $z = x + yi$, com $x > 0$ e $y > 0$. Assim:
$\bar{z} = x - yi;\ -z = -x - yi;\ -\bar{z} = -x + yi$

II. Localizando os números no plano, temos:



- $A = 2x \,.\, 2y$
- $\boxed{A = 4xy}$

Resposta correta: D

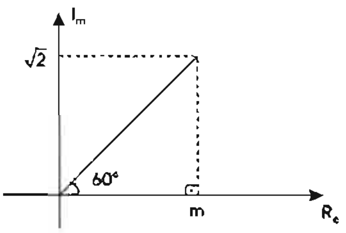
(PÁGINAS 48 E 49)

ATIVIDADES PARA SALA

1. A representação (a, 3) nos leva a $Z = a + 3i$, enquanto (0, 18) nos leva $Z_2 = 0 + 18i$.
$Z = a + 3i$
$Z^2 = (a + 3i)^2$
$0 + 18i = a^2 + 6ai + 9i^2$
$18i = a^2 - 9 + 6ai$
$6ai = 18i$
$6a = 18$
$a = 3$

Resposta correta: E

2.



$$tg60° = \frac{\sqrt{2}}{m} \therefore \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{m} \therefore \sqrt{3}m = \sqrt{2} \therefore m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Resposta correta: C

3. $|z| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$
$|z| = \sqrt{16 + 9}$
$|z| = 5$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5} \end{matrix}\right\} \theta = \arccos\frac{4}{5} = \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}$$

4. $\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{2^2 + (x-1)^2} \,.\, \left(\sqrt{x^2 + 9}\right)^2 = \left(\sqrt{4 + (x-1)^2}\right)^2$
$x^2 + 9 = 4 + x^2 - 2x + 1$
$2x = -4 \rightarrow x = -2$

Resposta correta: A

5. $$\left|\frac{1 - xi}{1 + xi}\right| = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-x)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (x)^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$$

Resposta correta: 1

6. $$z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2 + 2i}\right)^6$$

$$|z| = \left|\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2 + 2i}\right)^6\right| = \left|\frac{1 + \sqrt{3}i}{2 + 2i}\right|^6 = \left(\frac{|1 + \sqrt{3}i|}{|2 + 2i|}\right)^6$$

$$|z| = \left(\frac{\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right)^6 = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

Resposta correta: E

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. $Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$|Z| = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$, como $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|Z| = 2\left(\dfrac{1}{2} + i.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$|Z| = 1 + \sqrt{3}\,i$
$\bar{Z} = 1 - \sqrt{3}\,i$

Resposta correta: A

2. $Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

I. $|Z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$
$|Z| = 2$

II. $$\left.\begin{matrix} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

III. $Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$
$Z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

Resposta correta: B

3. Considerando $u = 1 - \sqrt{3}i$, temos:
$|u| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$|u| = \sqrt{4} = 2$
$Z = (1 - \sqrt{3}i)^{10}$
$Z = u^{10}$
$|Z| = |u^{10}|$
$|Z| = |u|^{10}$
$|Z| = 2^{10} = 1024$

Resposta correta: C

4. $Z = \dfrac{3+4i}{1-7i}$

$|Z| = \left|\dfrac{3+4i}{1-7i}\right|$

$|Z| = \dfrac{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-7)^2}}$

$|Z| = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta correta: A

5. $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-2+2i\sqrt{3}}$

$|Z| = \dfrac{|1+i\sqrt{3}|}{|-2+2i\sqrt{3}|}$

$|Z| = \dfrac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(-2)+(2\sqrt{3})^2}}$

$|Z| = \dfrac{2}{4}$

$|Z| = 1/2$

Resposta correta: D

6. Sendo $Z = a + bi$, então $|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|Z| + Z = 2 + i$

$\sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 2 + i$, igualando os complexos:

$bi = i$ $\qquad \sqrt{a^2+b^2} + a = 2$

$b = 1$ $\qquad \sqrt{a^2+1^2} = 2 - a$

$\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2 = (2-a)^2$

$\cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2}$

$4a = 3$

$a = 3/4$

Como $Z = a + bi$

$Z = \dfrac{3}{4} + 1.i$

$Z = \dfrac{3}{4} + i$

Resposta correta: A

7. Temos que:

$Z = \cos 20^\circ + i\,\mathrm{sen}\,20^\circ$

$\overline{Z} = \cos 20^\circ - i\,\mathrm{sen}\,20^\circ$

Portanto:

$|Z.\overline{Z}| = (\cos 20^\circ + i\,\mathrm{sen}\,20^\circ)(\cos 20^\circ - i\,\mathrm{sen}\,20^\circ)$

$= \cos^2 20^\circ - i^2 . \mathrm{sen}^2 20^\circ$, como $i^2 = -1$

$= \cos^2 20^\circ + \mathrm{sen}^2 20^\circ$

$= 1$

Resposta correta: A

8. $\dfrac{iZ+(1-3i)}{1+i} = \dfrac{4i}{1}$

$iZ + (1 - 3i) = (1 + i)4i$

$iZ = 4i + 4i^2 - 1 + 3i$

$iZ = 4i + 4(-1) - 1 + 3i$

$Z = \dfrac{-5+7i}{i}$

$|Z| = \dfrac{|-5+7i|}{|i|}$

$|Z| = \dfrac{\sqrt{(-5)^2+7^2}}{\sqrt{0^2+1^2}}$

$|Z| = \sqrt{74}$

Resposta correta: D

9. Considerando o complexo $Z = a + bi$, seu conjugado é $\overline{Z} = a - bi$:

$2Z - \overline{Z} = 1 + 6i$

$2(a + bi) - (a - bi) = 1 + 6i$

$a + 3bi = 1 + 6i$

$a = 1 \qquad 3b = 6$

$b = 2$

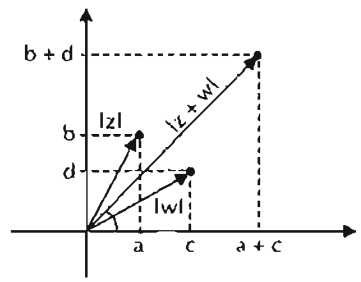
$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|Z| = \sqrt{1^2+2^2}$

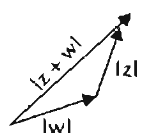
$|Z| = \sqrt{5}$

Resposta correta: B

10. Considerando $Z = a + bi$ e $W = c + di$



Deslocando | z |, podemos fechar um triângulo:



Pela desigualdade triangular:

$|z+w| \le |z| + |w|$

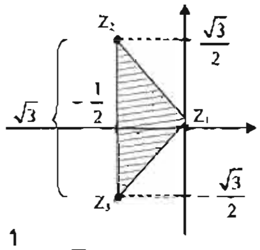
Resposta correta: E

(PÁGINAS 50 E 51)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Encontrando as raízes da equação:
   $Z^3 + Z^2 + Z = 0$
   $Z(Z^2 + Z + 1) = 0$
   $Z_1 = 0$ ou $Z^2 + Z + 1 = 0$
   $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $Z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

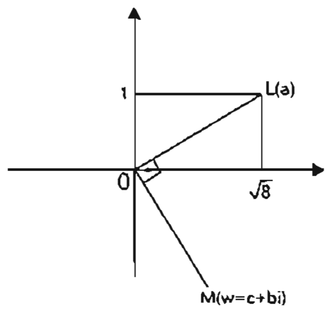
   Marcando no plano de Gauss:



$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta correta: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. $a = \sqrt{8} + i$



1) $w \cdot i = c \rightarrow ci - b = i + \sqrt{8} \rightarrow$
   $\rightarrow c = 1$ e $b = -\sqrt{8}$
2) $w = 1 \quad -\sqrt{8}$
3) Queremos saber o número complexo (z) cujo afixo está sobre OM e tem módulo 1.

Sabemos que $z = \alpha w$, melhor $z = \frac{w}{|w|} \rightarrow$
$\rightarrow z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3}i$

3. $Z = x + yi$
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x + yi}$$
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{(x + yi)} \frac{(x - yi)}{(x - yi)}$$
$$\frac{1}{Z} = \frac{x - yi}{x^2 - y^2 i^2}$$
$$\frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2}$$

Como Re, então: $\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{4}$

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$$
$x^2 + y^2 = -4y$
$x^2 + y^2 + 4y = 0$
$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 4$
$x^2 + (y + 2)^2 = 4$

Equação da circunferência

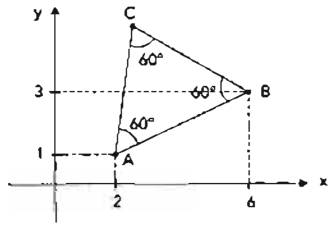
Resposta correta: A

4. $|Z - 1 + 3i| \leq 1$, considerando $Z = x + yi$.
   $|x + yi - 1 + 3i| \leq 1$
   $|x - 1 + (y + 3)i| \leq 1$
   $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 1$

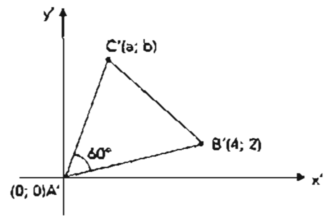
   É um círculo de centro (1, –3) e raio 1.

Resposta correta: B

5. Dados os pontos A(2; 1) e B(6; 3).



Para facilitar o nosso raciocínio, vamos considerar o eixo com origem em A. Veja:



1. $A'B' = (4 - 0) + (2 - 0)i \Rightarrow A'B' = 4 + 2i$ (complexo base)
2. $R = cis\,60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $A'B' \cdot R = (4 + 2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i + i - \sqrt{3} =$
   $= \left(2 - \sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3} + 1\right)i.$

Assim C' é $= \left(2 - \sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3} + 1\right)i.$

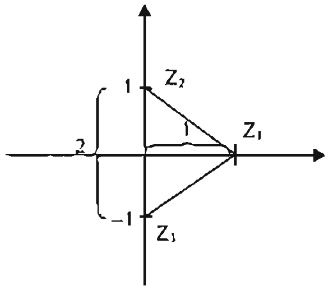
Para encontrarmos "C", que é o ponto original, devemos acrescentar 2 em x e 1 em y, que foram retirados na translação de eixo $\left(A(2;1) \Rightarrow A'(0;0) \text{ e } B(6;3) \Rightarrow B'(4,2)\right)$.
Assim C é $\left(\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2; \left(2\sqrt{3} + 1\right) + 1\right) = \left(4 - \sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 2\right)$

Resposta correta: $\left(4 - \sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 2\right)$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Encontrando as raízes:
$Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$
$Z^2 (Z - 1) + Z - 1 = 0$
$Z - 1 (Z^2 + 1) = 0$
$Z - 1 = 0$ ou $Z^2 = -1$
$Z_1 = 1$
$Z = \pm\sqrt{-1}$
$Z = \pm i$
$Z_2 = i$ e $Z_3 = -i$

Marcando no plano de Gauss:



$A = \frac{2 \cdot 1}{2}$

$\boxed{A = 1}$

Resposta correta: 1

2. Considerando $Z = x + yi$, teremos:
$|Z| = 5$
$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (5)^2$
$x^2 + y^2 = 25$

Equação da circunferência de centro (0, 0) e raio 5.

Resposta correta: C

3. Considerando $Z = x + yi$
$Z + 1 = x + yi + 1$
$Z + 1 = \underbrace{x + 1}_{\text{Parte real}} + yi$

Como a parte real é 2, então:
$x + 1 = 2$
$x = 2$

$\boxed{\text{Equação de uma reta vertical}}$

Resposta correta: B

4. Considerando $Z = x + yi$, teremos:
$|Z + i| = |3 - Z|$
$|x + yi + i| = |3 - x - yi|$
$|x + (y + 1)i| = |3 - x - yi|$
$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-y)^2}$
$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 = 9 - 6x + \cancel{x^2} + \cancel{y^2}$
$6x + 2y - 9 = 0$

$\boxed{\text{Equação da reta}}$

Resposta correta: A

5. $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$

$\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ $\quad \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

$\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} = 1$

$\frac{x - y}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = x - y \Rightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0$

$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

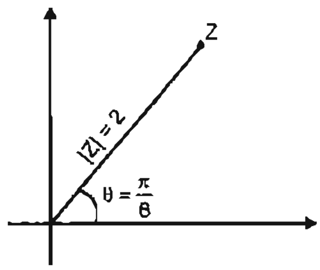
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Circunferência de centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta correta: D

6. Observe o plano de Gauss



$Z = |Z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{Z = \sqrt{3} + i}$

Resposta correta: B

7. $Z = a + ia^2$, considerando $Z = x + yi$
$x + yi = a + ia^2$
Igualando as partes reais e imaginárias:
$x = a$ $\quad y = a^2$
$y = x^2$

$\boxed{\text{Equação da parábola}}$

Resposta correta: C

8. $Z = a + i\,\sqrt{1-a^2}$, sendo $Z = x + yi$, teremos:

$x + yi = a + i\,\sqrt{1-a^2}$

$x = a \quad e \quad y = \sqrt{1-a^2}$

Observe que:

$x^2 + y^2 = a^2 + \left(\sqrt{1-a^2}\right)^2$

$x^2 + y^2 = a^2 + 1 - a^2$

$x^2 + y^2 = 1$

$\boxed{\text{Equação da circunferência}}$

Resposta correta: C

9. Considerando $Z = x + yi$:

I. $\begin{cases} |Z| = 2 \\ |Z - i| = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} |x + yi| = 2 \\ |x + yi - i| = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \\ |x + (y-1)i| = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1^2 \end{cases}$

Isolando x^2

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 = 4 - y^2$

Substituindo na outra equação:

$x^2 + (y - 1)^2 = 1$

$4 - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 1$

$2y = 4$

$y = 2$

Encontrando x

$x^2 = 4 - y^2$

$x^2 = 4 - 2^2$

$x^2 = 0$

$x = 0$

Portanto: $\boxed{Z = x + yi = 0 + 2i = 2i \quad 1 \text{ solução}}$

Resposta correta: B

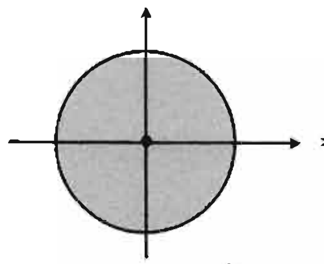
10. $|Z| \le 1$

$\sqrt{x^2 + y^2} \le 1$

$x^2 + y^2 \le 1$

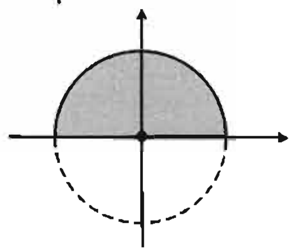
Equação do círculo

C(0, 0) e R = 1



$\Rightarrow$ como $y \ge 0$

$\Rightarrow$



Teremos um semicírculo.

Resposta correta: D

11. Considerando $Z = x + yi$:

$|Z - 2| \le 4$

$|x + yi - 2| \le 4$

$|x - 2 + yi| \le 4$

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \le 4$

$(x^2 - 2)^2 + y^2 \le 16$

Resposta correta: Círculo de Centro (2, 0) e raio 4

12. Considerando $Z = x + yi$

$|Z - 25i| \le 15$

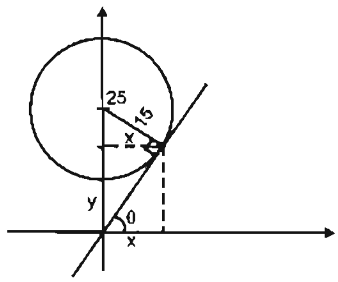
$|x + yi - 25i| \le 15$

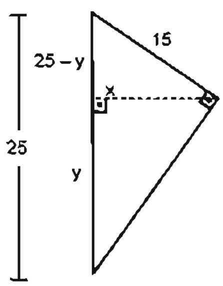
$|x + (y-25)i| \le 15$

$\sqrt{x^2 + (y-25)^2} \le 15$

$\underbrace{x^2 + (y-25)^2 \le 15}_{\text{Equação do círculo com centro (0,25) e raio 15}}$

Ponto de menor argumento





Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo

I. $(\text{cateto})^2$ = Projeção x hipotenusa

$15^2 = (25 - y)25$
$9 = 25 - y$
$y = 16$

II. $15^2 = x^2 + (25 - y)^2$

$225 = x^2 + (25 - 16)^2$
$x^2 = 144$
$x = \pm 12$
$x = 12$

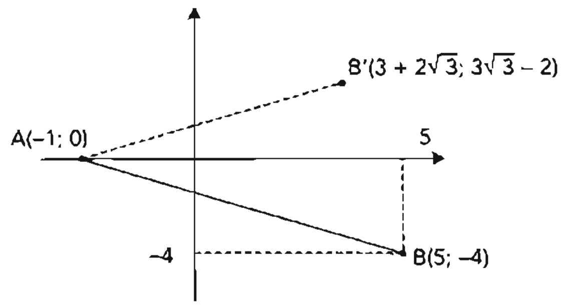
Portanto:
$Z = x + yi$

$\boxed{Z = 12 + 16i}$

Resposta correta: $Z = 12 + 16i$

13.

I. Temos os pontos $A(-1;0)$ e $B(5;-4)$ no plano abaixo:



II. $\overline{AB} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i = 6 - 4i$ (complexo base)

III. $R = 1(\cos 60° + i\,\text{sen}60°) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (gerador)

IV. $\overline{AB} \cdot R = (6 - 4i)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3\sqrt{3}i - 2i - 2\sqrt{3}i^2 =$

$= 3 + 2\sqrt{3} + (3\sqrt{3} - 2)i = B'$

Resposta correta: $A(-1,0)$ e $B'(3+2\sqrt{3};\ 3\sqrt{3} - 2)$

14. Se o complexo vai sofrer uma rotação de 90° no sentido horário é o mesmo que sofrer uma rotação de 270° no sentido anti-horário (+). Assim $R = 1(\cos 270° + i\,\text{sen}270°) = -i$

Resposta correta: $-i$

15. I. Da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$ fazendo $z^5 = k$, temos a equação $y^2 + y + 1 = 0$ de raízes $y' = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow$ e

$\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e $y'' = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}i \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

II. Podemos escrever que duas de suas raízes de z^5 são

$y' = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e $y' = \text{cis}\,120° \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \sqrt[5]{1}(\text{cis}120° + i\,\text{sen}120°)$ e

$y'' = \sqrt[5]{1}(\text{cis}\,240° + i\,\text{sen}240°)$

III. $\dfrac{360°}{5} = 72°$, assim as raízes serão

$x_1 = \text{cis}\,48°$
$x_2 = \text{cis}\,120°$
$x_3 = \text{cis}\,192°$
$x_4 = \text{cis}\,264°$
$x_5 = \text{cis}\,336°$; se fizermos 336 + 72 = 408 – 360 = 48 que já usamos.

Resposta correta: A

(PÁGINAS 51 E 52)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Se $Z_1 = 4(\cos 30° + i\text{sen}30°)$, $Z_2 = 2(\cos 20° + i\text{sen}20°)$ e $Z_3 = 5(\cos 40° + i\text{sen}40°)$

$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 4 \cdot 2 \cdot 5\,[\cos(30° + 20° + 40°) + i\text{sen}(30° + 20° + 40°)]$

$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 40[\cos 90° + i\text{sen}90°] \Rightarrow$

$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 40\,[0 + 1 \cdot i] = 40i$

Resposta correta: 40i

2. $Z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ escrito na forma trigonométrica da seguinte forma:

I. $|Z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 1$

II. Argumento

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = 30° \text{ ou } \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

III. $Z = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

IV. $Z^{24} = (1)^{24} \cdot \left(\cos 24 \cdot \dfrac{\pi}{6} + i\text{sen}24 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right)$

$Z^{24} = 1(\cos 4\pi + i\text{sen}4\pi)$
$Z^{24} = 1(1 + i \cdot 0)$
$Z^{24} = 1$

Assim: $1 + Z + Z^2 + Z^3 + \ldots + Z^{23}$

$S_n = \dfrac{1[Z^{24} - 1]}{Z - 1} \Rightarrow S_n = \dfrac{1(1-1)}{Z-1} = \boxed{0}$

Resposta correta: C

3. Sendo $Z = \sqrt{3} + 1i$ escrito na forma trigonométrica da seguinte forma:

I. $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$

II. $$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$

III. $Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

Logo, para $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$Z^n = 2^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]$$

Assim:

$$Z^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \text{sen}(k\pi) \Rightarrow \boxed{n = 6k}$$

Portanto, um dos possíveis valores para n é 6.

Resposta correta: B

4. $x = \cos a + i\,\text{sen}\,a$

$x^2 = (\cos a + i\,\text{sen}\,a)^2$

$x^2 = \cos^2 a + 2\,\text{sen}\,a\cos a\,i + \underbrace{(i^2)}_{=-1}\,.\,\text{sen}^2 a$

$x^2 = \underbrace{\cos^2 a - \text{sen}^2 a}_{\cos 2a} + \underbrace{2\,\text{sen}\,a\cos a\,i}_{\text{sen}\,2a}$,

$x^2 = \cos 2a + \text{sen}\,2a\,.\,i$, como $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \cos 2a + \text{sen}\,2a\,i$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore \cos 2a = \frac{1}{2}\\ \text{sen}\,2a = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} 2a = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}$$

Resposta correta: D

5. $z_1\,.\,z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)\,.\,|z_2|(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|\,|z_2|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|\,|z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|\,|z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 + (\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2\cos\theta_1)i) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1|\,|z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Dividindo os complexos:

$Z_1 = 5(\cos 25° + i\,\text{sen} 25°)$

$Z_2 = 7(\cos 10° + i\,\text{sen} 10°)$

Teremos:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5}{7}(\cos 15° + i\,\text{sen} 15°)$$

Resposta correta: A

2. Dividindo os números complexos:

$$\frac{z}{w} = \frac{8}{2}\,[\cos(75° - 15°) + i\,\text{sen}(75° - 15°)]$$

$$\frac{z}{w} = 4\,(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$$

$$\frac{z}{w} = 4\,.\left(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{z}{w} = 2 + 2\sqrt{3}\,i}$$

Resposta correta: B

3. $Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z^8 = (\sqrt{2})^8\,.\left[\cos 8.\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen} 8.\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow Z^8 = 16[\cos 2\pi + i\,\text{sen} 2\pi]$

$\Rightarrow Z^8 = 16[1 + i\,.\,0] = \boxed{16}$

Resposta correta: D

4. $Z = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z^{-12} = 1^{-12}\left[\cos\frac{5\pi}{3}\,.\,(-12) + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\,.\,(-12)\right]$

$Z^{-12} = 1\ [\cos(-20\pi) + i\,\text{sen}(-20\pi)]$

Sabemos que -20π é côngruo de 0, então:

$Z^{-12} = 1\,(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$

$Z^{-12} = 1\,(1 + i\,.\,0)$

$Z^{-12} = 1$

Resposta correta: A

5. Observe que:

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$Z = 2(\cos 45° + i\,\text{sen} 45°)$

Elevando Z a 7:

$Z^7 = 2^7(\cos 45° \times 7 + i\,\text{sen} 45° \times 7)$

$Z^7 = 2^7\,(\cos 315° + i\,\text{sen} 315°)$

$$Z^7 = 2^7\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$Z^7 = 2^6.\sqrt{2} - 2^6.\sqrt{2}i$, como $Z^7 = a + bi$, então

$Z^7 = a + bi = 2^6\sqrt{2} - 2^6\sqrt{2}\,i$

Igualando as partes reais e imaginárias:

$a = 2^6.\sqrt{2} \qquad b = -2^6.\sqrt{2}$

$a.b = 2^6.\sqrt{2}\,.\,(-2^6).\sqrt{2}$

$$\boxed{a.b = -2^{13}}$$

Resposta correta: B

6. Sendo $E = (1 + i)^{41}$, teremos:

$E = (1 + i)^{40}\,.\,(1 \times i)$

$E = [(1 + i)^2]^{20}\,.\,(1 + i)$

$E = [1 + 2i + i^2]^{20}\,.\,(1 + i)$

$E = [1 + 2i - 1]^{20}\,.\,(1 + i)$

$E = (2i)^{20}\,.\,(1 + i)$

$E = 2^{20}\,.\,i^{20}\,.\,(1 + i)$

$E = 2^{20}\,.\,1\,(1 + i)$

$E = 2^{20}\,.\,(1 + i)$

$i^{20} = i^0 = 1$

Resposta correta: E

7. Observe o produto notável:

$$w^6 - 1 = (w - 1)(w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1)$$

$$w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w^1 + 1 = \frac{w^6 - 1}{w - 1}$$

Calculando w^6:

$w = \cos 60° + i\operatorname{sen} 60°$
$w = 1(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$
$w^6 = 1^6(\cos 60° \times 6 + i\operatorname{sen} 60° \times 6)$
$w^6 = 1(\cos 360° + i\operatorname{sen} 360°)$
$w^6 = 1(1 + i\,.\,0)$
$w^6 = 1$

Logo:

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \frac{w^6 - 1}{w - 1}$$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \frac{1 - 1}{w - 1}$$

$$w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

Resposta correta: D

8. Usando a soma da PG: $S_n = \dfrac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$

$S = 1 + Z + Z^2 + \ldots + Z^6$

$$S = \frac{1\,.\,Z^7 - 1}{Z - 1}$$

$$S = \frac{Z^7 - 1}{Z - 1}$$

Passando Z para a forma trigonométrica e elevando a 7:

$$Z = 1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$Z = 1\,(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$
$Z^7 = 1^7\,(\cos 7\,.\,60° + i\operatorname{sen} 7\,.\,60°)$

$$Z^7 = 1\,(\cos 420° + i\operatorname{sen} 420°) \Rightarrow \begin{array}{l|l} 420° & 360° \\ \hline 60° & 1 \end{array}$$

$Z^7 = 1\,(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$
$Z^7 = Z$

Desta maneira:

$$S = \frac{Z^7 - 1}{Z - 1}$$

$$S = \frac{Z - 1}{Z - 1} \Rightarrow \boxed{S = 1}$$

Resposta correta: 01

9. Sendo $Z_1 = |Z_1|\,(\cos \theta_1 + i\operatorname{sen} \theta_1) = 1\,(\cos \theta_1 + i\operatorname{sen} \theta_1)$, temos:

I. $w = 1 + i$

$$|w| = \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = 45°$$

$w = |w|\,(\cos \theta + i\operatorname{sen} \theta)$
$w = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)]$

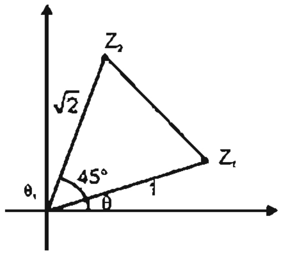
II. $Z_2 = Z_1\,(1 + i)$
$Z_2 = 1\,(\cos \theta_1 + i\operatorname{sen} \theta_1)\,.\,\sqrt{2}\,(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$
$Z_2 = \sqrt{2}\,[\cos(\theta_1 + 45°) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + 45°)]$

Marcando Z_1 e Z_2 no plano de Gauss

$$A = \frac{\sqrt{2}.1.\operatorname{sen}45°}{2}$$

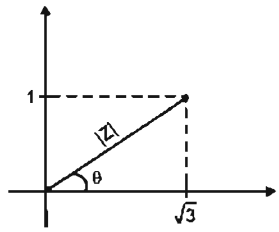
$$A = \frac{\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$



Resposta correta: $\frac{1}{2}$

10. Temos que:



Calculando o módulo:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$|Z| = 2$$

Calculando o argumento:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|Z|} = \frac{1}{2} \\ \cos\theta &= \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = 30°$$

Passando para a forma trigonométrica:

$Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$
$Z = 2(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$

Elevando ao quadrado:

$Z^2 = 2^2(\cos 30° \times 2 + i\operatorname{sen} 30° \times 2)$

$$\boxed{Z^2 = 4(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)}$$

Resposta correta: B

11. $Z = \left[(2 - 2i)^2\right]^{\frac{n}{2}}$

$$Z = \left(2^2 - 2\,.\,2\,.\,2i + (2i)^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$Z = (\cancel{4} - 8i - \cancel{4})^{\frac{n}{2}}$$

$$Z = (-8i)^{\frac{n}{2}}, \text{ como } i^3 = -i$$

$$Z = \left[2^3\,.\,i^3\right]^{\frac{n}{2}}$$

$Z = (2i)^{\frac{3n}{2}}$

$512i = (2i)^{\frac{3n}{2}}$, como $i^9 = i$

$2^9 i^9 = (2i)^{\frac{3n}{2}}$

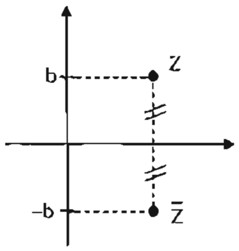
$(2i)^9 = (2i)^{\frac{3n}{2}}$

$\frac{3n}{2} = 9$

$\boxed{n = 6}$

Resposta correta: E

12. I. Correto.
Sendo $Z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$, o seu conjugado é $\overline{Z} = a - bi$, marcando no plano de Gauss.



Então, a mesma distância do eixo real.

II. Errado
Pode ser um número complexo, por exemplo:
$Z = 1 + i$
$Z^2 = (1 + i)^2$
$Z^2 = 1 + 2i + \cancel{i^2}$
$Z^2 = 2i$

III. Correto, pela própria definição.

Resposta correta: D

13. Considere $K = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^n$. Passando para a forma trigonométrica:

$K = \left[2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^n$

$K = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^n$

$K = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,n\frac{\pi}{3}\right)$

Para K ser um número real e negativo, é necessário que $\cos n\frac{\pi}{3} = -1$ e $i\,\text{sen}\,n\frac{\pi}{3} = 0$, para $\frac{n\pi}{3}$ tem de ser π, 3π, 5π, ..., o menor valor se dá quando $\frac{n\pi}{3} = \pi$, ou seja, $\boxed{n = 3}$

Resposta correta: B

14. Passando para a forma trigonométrica:

$y^n = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]^n$

$y^n = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^n$

$y = \left[1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^n$

Elevando a n:

$y = 1^n\left(\cos\frac{\pi.n}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi.n}{6}\right)$

$\frac{\pi.n}{6}$ tem de ser múltiplo de 2π, o que zera a parte imaginária, para isto o menor valor de n será 12.

$\boxed{\frac{\pi.n}{6} = \frac{\pi.12}{6} = 2\pi}$

Resposta correta: E

15. Efetuando o produto:

$Z = (1+i)\left(\sqrt{3} - i\right)$

$Z = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2$

$Z = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1$

$Z = \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i$

Passando para a forma trigonométrica

$|Z| = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}$

$|Z| = \sqrt{3 + \cancel{2\sqrt{3}} + 1 + 3 - \cancel{2\sqrt{3}} + 1}$

$|Z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,\theta &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}\right\} \theta = 15° = \frac{\pi}{12}\text{rad}$$

$Z = |Z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$

Elevando-se a n:

$Z^n = (2\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi}{12}.n + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}.n\right)$

Para Z^n ser real e positivo é necessário que $\cos\frac{\pi.n}{12} = 1$ e $\text{sen}\frac{\pi}{12}n = 0$, o que ocorre quando o ângulo for da forma $2k\pi$.

$\frac{\cancel{\pi}}{12}n = 2k\cancel{\pi} \Rightarrow n = 24k$

Para obter o menor inteiro positivo, k tem de ser 1, portanto $n = 24 . 1 = \boxed{24}$

Resposta correta: D

(PÁGINA 55)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Temos que:

$Z = 27(\cos 30° + i\,\text{sen}30°)$

$Z_k = \sqrt[3]{27}\left[\cos\frac{30° + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{30° + 2k\pi}{3}\right]$

$Z_0 = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}10°)$

$Z_1 = 3(\cos 130° + i\,\text{sen}130°)$

$Z_2 = 3(\cos 250° + i\,\text{sen}250°)$

2. $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1}$, ou seja, calcular as raízes cúbicas de -1.

$Z = -1$

$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ \text{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0\end{array}\right\} \theta = \pi = 180°$

$Z = 1(\cos 180° + i\text{sen}180°)$

$Z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{180° + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{180° + 2k\pi}{3}\right)$

$Z_0 = 1(\cos 60° + i\,\text{sen}60°)$

$Z_1 = 1(\cos 180° + i\,\text{sen}180°)$

$Z_2 = 1(\cos 300° + i\,\text{sen}300°)$

3. $Z = -8 - 8\sqrt{3}i$ passando para a forma trigonométrica:

$Z = 16\left(\frac{-8}{16} - \frac{8\sqrt{3}}{16}i\right)$

$Z = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z = 16\ (\cos 240° + i\ \text{sen}\ 240°)$

$Z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{240° + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{240° + 2k\pi}{4}\right)$

$Z_0 = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}60°) \Rightarrow Z_0 = 1 + \sqrt{3}i$

$Z_1 = 2(\cos 150° + i\,\text{sen}150°) \Rightarrow Z_1 = -\sqrt{3} + i$

$Z_2 = 2(\cos 240° + i\,\text{sen}240°) \Rightarrow Z_2 = -1 - \sqrt{3}i$

$Z_3 = 2(\cos 330° + i\,\text{sen}330°) \Rightarrow Z_3 = \sqrt{3} - 1$

4. $2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = -4$

Seja $Z = -4$

$|Z| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2}$

$|Z| = 4$

$Z = -4 + 0 . i$ passando para a forma trigonométrica

$Z = 4\left(-\frac{4}{4} + \frac{0.i}{4}\right)$

$Z = 4(-1 + 0 . i)$

$Z = 4(\cos 180° + i\ \text{sen}180°)$

$Z_k = \sqrt{4}\left(\cos\frac{180° + 2k\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{180° + 2k\pi}{2}\right)$

$Z_0 = 2(\cos 90° + i\,\text{sen}90°) \Rightarrow Z_0 = 2i$

$Z_1 = 2(\cos 270° + i\,\text{sen}270°) \Rightarrow Z_1 = -2i$

5. Considerando $y = x^3$, teremos:

$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

$(x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0$

$y^2 + 7y - 8 = 0$

$y = 1$	ou	$y = -8$
$x^3 = 1$		$x^3 = -8$
$x = \sqrt[3]{1}$		$x = \sqrt[3]{-8}$

Calculando $x = \sqrt[3]{1}$:

$x = \sqrt[3]{1 + 0i}$

$x = \sqrt[3]{\cos 0 + i\,\text{sen}\ 0}$

$x_1 = \cos\frac{0}{3} + i\text{sen}\frac{0}{3}$

$x_1 = \cos 0 + i\ \text{sen}\ 0 = \text{cis}\ 0$

$\downarrow + \frac{360°}{3} = 120°$

$x_2 = \cos 120° + i\ \text{sen}\ 120° = \text{cis}\ 120°$

$\downarrow + 120°$

$x_3 = \cos 240° + i\ \text{sen}\ 240° = \text{cis}\ 240°$

Calculando $x = \sqrt[3]{-8}$

$x = \sqrt[3]{-8 + 0i}$

$x = \sqrt[3]{8(-1 + 0i)}$

$x = \sqrt[3]{8(\cos 180° + i\,\text{sen}180°)}$

$x_1 = \sqrt[3]{8}\ \left(\cos\ \frac{180°}{3} + i\,\text{sen}\ \frac{180°}{3}\right)$

$x_1 = 2\cos\ (60° + i\ \text{sen}\ 60°) = 2\ \text{cis}\ 60°$

$\downarrow + \frac{360°}{3} = 120°$

$x_2 = 2\ (\cos 180° + i\ \text{sen}\ 180°) = 2\ \text{cis}\ 180°$

$\downarrow + 120°$

$x_3 = 2\ (\cos 300° + i\ \text{sen}\ 300°) = 2\ \text{cis}\ 300°$

$S = \{\text{cis}\ 0, \text{cis}\ 120°, \text{cis}\ 240°, 2\ \text{cis}\ 60°, 2\ \text{cis}\ 180°, 2\ \text{cis}\ 300°$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Encontrando as raízes quadradas

$Z = 1(\cos 90° + i\,\text{sen}90°)$

$Z_k = \sqrt{1}\left(\cos\frac{90° + 2k\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{90° + 2k\pi}{2}\right)$

$Z_0 = 1(\cos 45° + i\,\text{sen}45°)$

$Z_1 = 1(\cos 225° + i\,\text{sen}225°)$

Resposta correta: C

2. Considerando **x** o número:

$\sqrt[4]{x} = Z$

$x = Z^4$, como $Z = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)$, então

$x = \left[\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^4$

$x = \sqrt[8]{2^4}\left(\cos\frac{\pi}{16}\cdot 4 + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\cdot 4\right)$

$x = \sqrt[2]{2^1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

$x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i$

$\boxed{x = 1 + i}$

Resposta correta: B

3. Passando o complexo para a forma trigonométrica:

$Z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z = \cos 300° + i\,\text{sen}300°$

$Z = 1(\cos 300° + i\,\text{sen}300°)$

Calculando as raízes quadradas:

$\sqrt{Z} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{300°}{2} + i\,\text{sen}\frac{300°}{2}\right)$

$x_1 = 1(\cos 150° + i\,\text{sen}150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\frac{360°}{2} = +180° \downarrow$

$x_2 = 1(\cos 330° + i\,\text{sen}330°) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

Resposta correta: C

4. Considerando $\sqrt{Z} = x + yi$

$\sqrt{Z} = x + yi$

$Z = (x + yi)^2$

$Z = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

Igualando as partes reais e imaginárias:

I. $2xy = -12$

$\boxed{y = \frac{-6}{x}}$

II. $x^2 - y^2 = 5$

$x^2 - \left(\frac{-6}{x}\right)^2 = 5$

$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$

$(x^2)^2 - 36 = 5x^2$

$(x^2)^2 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = -4$

$x = \pm 3$ $\qquad$ $x = \sqrt{-4}$ não convém, pois $x \in \mathbb{R}$

Portanto:

Se $x = 3$

$y = \frac{-6}{3}$

$y = -2$

$\boxed{Z_1 = 3 - 2i}$

Se $x = -3$

$y = \frac{-6}{-3}$

$y = 2$

$\boxed{Z_2 = -3 + 2i}$

Resposta correta: B

5. Encontrando x:

$x^2 - 4i = 0$

$x^2 = 4i$

$x = \sqrt{4i}$

Passando para a forma trigonométrica:

$x = \sqrt{4(0 + 1.i)}$

$x = \sqrt{4(\cos 90° + i\,\text{sen}90°)}$

Encontrando as raízes quadradas:

$x_1 = 2(\cos 45° + i\,\text{sen}45°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\frac{+360°}{2} = 90° \downarrow$

$x_2 = 2(\cos 135° + i\,\text{sen}135°) = 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Resposta correta: E

6. Da equação $x^3 - 27 = 0$, temos:

I. $x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27(\cos 0° + i\,\text{sen}0°)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3(\cos 0° + i\,\text{sen}0°)$

$x_1 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{0°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0°}{3}\right)\right) \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{0 + 360°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0 + 360°}{3}\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$x_3 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{0 + 720°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0 + 720°}{3}\right)\right)$

$\Rightarrow x_3 = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

II. Assim a soma $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{6}$

Resposta correta: A

7. Transformando o número z = – i para a forma trigonométrica, temos:

I. $|z| = 1$

II. $\left.\begin{matrix} \text{sen}\,\theta = -1 \\ \cos\theta = 0 \end{matrix}\right\}\theta = 270° \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2}\text{ rad}$

III. $z = -i \Rightarrow z = 1(\cos 270° + i\,\text{sen}270°)$

$$x_1 = 1\left(\cos\left(\frac{270°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{270°}{3}\right)\right) \Rightarrow x_1 = i$$

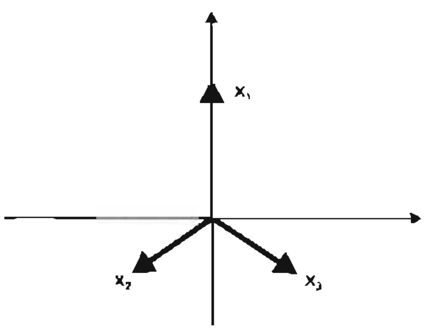
$$x_2 = 1\left(\cos\left(\frac{270° + 360°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{270° + 360°}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$x_3 = 1\left(\cos\left(\frac{270° + 720°}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{270° + 720°}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

IV. Localizando as raízes no plano, temos:



Resposta correta: D

8. Do número z = 1 + i, temos que $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

1. $x_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{16}\right)$

$$x_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)$$

$$x_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$x_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{25\pi}{16}\right)$$

2. $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{9\pi}{16} + \dfrac{17\pi}{16} + \dfrac{25\pi}{16} = \boxed{\dfrac{13\pi}{4}}$

Resposta correta: E

9. Resolvendo a equação sem considerar as raízes complexas:

$x^6 - 26x^3 - 27 = 0$
$x^3 = y$
$y^2 - 26y - 27 = 0$
$y = 27$ ou $y = -1$
$x^3 = 27$ $\quad x^3 = -1$
$x = 3$ $\quad x = -1$

$x' + x'' = 3 - 1 = \boxed{2}$

Resposta correta: E

10. $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8}$

$Z = 8$
$|Z| = \sqrt{(8)^2 \times 0^2}$
$|Z| = 8$
$Z = 8\left(\dfrac{8}{8} + \dfrac{0i}{8}\right)$
$Z = 8(1 + 0\,i)$

$Z = 8(\cos 0° + i\,\text{sen}0°)$

$$Z_k = \sqrt[3]{8} = \left[\cos\frac{0° + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{0° + 2k\pi}{3}\right]$$

$$Z_0 = 2\left[\cos 0° + i\,\text{sen}0°\right] \Rightarrow Z_0 = 2$$

$$Z_1 = 2\left[\cos 120° + i\,\text{sen}120°\right] \Rightarrow Z_1 = -1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 2\left[\cos 240° + i\,\text{sen}240°\right] \Rightarrow Z_2 = -1 - \sqrt{3}i$$

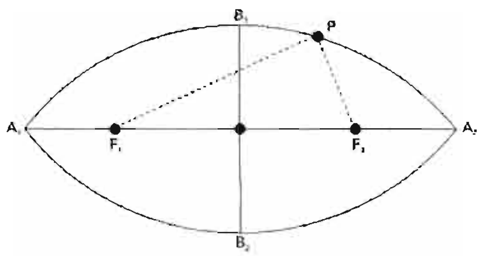
Resposta correta: A

Módulo 5

CÔNICAS
(PÁGINA 57)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Lembrando:
Considere a elipse E abaixo:



$\rightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$

I. Considere a equação $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ da elipse **E**. Assim, temos:
$a^2 = 169 \rightarrow a = 13$ (semi-eixo maior)
$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$ (semi-eixo menor)

II. Sabemos que $PF_1 + PF_2 = 2a$. Considerando $PF_1 = 8$, temos:
$8 + PF_2 = 2 \,.\, 13$
$8 + PF_2 = 26$
$PF_2 = 18$

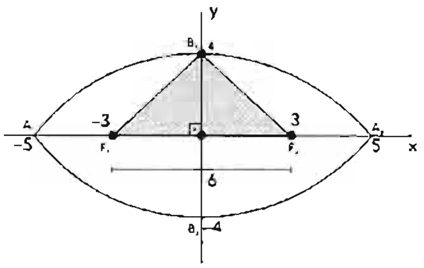
Resposta correta: C

2. I. Da equação $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, temos:

$a^2 = 25 \to a = 5$
$b^2 = 16 \to b = 4$

Como 25 > 16 e 25 está sobre x^2, então o eixo maior é horizontal (próprio **x**).

II. Observe a figura:



$a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 4^2 + c^2 \to c = 3$

III. A área máxima do triângulo F_1PF_2 será máxima quando **P** coincidir com B_1 ou B_2, ou seja, a altura do triângulo é 4.

$A = \dfrac{6.4}{2} \to \underline{A = 12}$

Resposta correta: A

3. $4x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ e $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Para calcularmos interseções, fazemos:

$y^2 = 25 - x^2 \to 4x^2 + 9(25 - x^2) - 144 = 0 \to$

$\to 4x^2 + 225 - 9x^2 - 144 = 0 \to 5x^2 = 81 \to x = \dfrac{\pm 9}{\sqrt{5}}$.

Assim, $y^2 = 25 - \dfrac{81}{5} = \dfrac{44}{5} \to y = \pm\sqrt{\dfrac{44}{5}}$. Com tais valores formamos 4 pontos de interseção distintos.

Resposta correta: E

4. I. Considere a elipse E: $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$. Assim temos:

$25x^2 + 9y^2 = 225 \to \dfrac{25x^2}{225}+\dfrac{9y^2}{225}=\dfrac{225}{225} \to \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(eixo maior vetorial)

II. Pela equação, temos:

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 25 \to \underline{a = 5} \\ b^2 = 9 \to \underline{b = 3} \end{array}\right\} a^2 = b^2 + c^2 \to 5^2 = 3^2 + c^2 \to \underline{c = 4}$

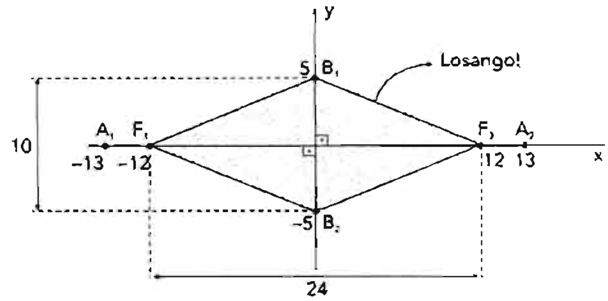
$e = \dfrac{c}{a} \to e = \dfrac{4}{5}$

Resposta correta: B

5. I. Da elipse E: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$, temos:

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 169 \to \underline{a = 13} \\ b^2 = 25 \to \underline{b = 5} \end{array}\right\} a^2 = b^2 + c^2 \to 13^2 = 5^2 + c^2 \to \underline{c = 12}$

II. Como o centro é a origem, temos:



$A_{losango} = \dfrac{24 \cdot 10}{2} = \underline{120}$

Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Temos $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25} \to a = 5$ e $b = 4$.

Como $b^2 + c^2 = a^2 \to c^2 = 25 - 16 \to c^2 = 9 \to c = 3$.

Logo $\begin{cases} F_1 = (0,-3) \\ F_2 = (0,3) \\ P = (6,1) \end{cases}$. Então, $A = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot 36 =$

$= 18$ua.

Resposta correta: D

2. $2a = 12$; $2b = 8$; $a^2 = b^2 + c^2$

$a = 6$; $b = 4$; $6^2 = 4^2 + c^2$

$36 = 16 + c^2$
$c^2 = 20$
$c = \sqrt{20}$
$c = 2\sqrt{5}$

$e = \dfrac{c}{a} \to e = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} \to e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

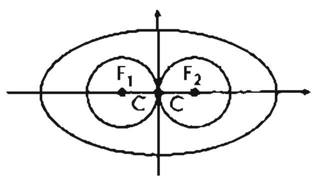
Resposta correta: B

3. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \to$ Centro (0,0)

I. $a^2 = 25$
$a^2 = b^2 + c^2$

II. $b^2 = 9$

III. $25 = 9 + c^2$
$c^2 = 16$
$c = 4$



$F_1\,(0 - 4, 0)$ $F_2\,(0 + 4, 0)$
$F_1\,(-4, 0)$ $F_2\,(4, 0)$

1ª Circunferência $r = c = 4$
$(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$
$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 16$
$x^2 + y^2 + 8x = 0$

2ª Circunferência $r = c = 4$
$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16$
$x^2 + y^2 - 8x = 0$

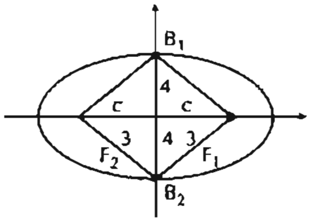
Resposta correta: B

4. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \rightarrow$ Centro(0,0)

I. $a^2 = 25$
$a = 5$

II. $b^2 = 16$
$b = 4$

III. $a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 4^2 + c^2$
$c = 3$



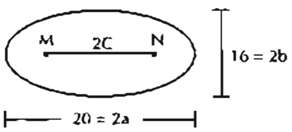
$F_1\,(3, 0)$ $\quad B_1\,(0, 4)$
$F_2\,(-3, 0)$ $\quad B_2\,(0, -4)$

Área do losango $B_1F_1B_2F_2$

$A=\dfrac{D.d}{2}=\dfrac{8.6}{2}=24$

Resposta correta: E

5. Observe que:



I. $2a = 20$
$a = 10$

II. $2b = 16$
$b = 8$

III. $a^2 = b^2 + c^2$
$10^2 = 8^2 + c^2$
$c^2 = 36$
$c = 6$

IV. $\overline{MN} = 2c$
$\overline{MN} = 2 . 6$
$\overline{MN} = 12$

Resposta correta: B

6. Eixo maior horizontal: $2a = 10 \rightarrow a = 5$.
Como $b^2 + c^2 = a^2$ e $2c = 8 \rightarrow c = 4 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3$.

Logo $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9} = 1 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

Resposta correta: A

7. Temos a equação E: $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\text{sen}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \cos t \\ \dfrac{y}{5} = \text{sen}t \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\dfrac{y}{5}\right)^2 = \text{sen}^2 t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{25} = \text{sen}^2 t \end{cases} + \rightarrow$$

$$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25} = \underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{1}$$

$$\rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25} = 1 \rightarrow 25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$$

Resposta correta: D

8. Temos, $x^2 + y^2 - 16y + 48 = 0$ e $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 16x^2 + 16y^2 - 256y + 768 = 0$ e $16x^2 = 400 - 25y^2 \rightarrow$
$\rightarrow 400 - 25y^2 + 16y^2 - 256y + 768 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 9y^2 + 256y - 1168 = 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 328$.

Então, $y = \dfrac{-256 \pm 328}{18} \rightarrow y_1 = \dfrac{-584}{18}$ e $y_2 = \dfrac{72}{18} = 4$.

Substituindo: $16x^2 = 400 - 25\left(-\dfrac{584}{18}\right)^2 \leq 0$. Absurdo.

Portanto, $16x^2 = 400 - 25(4)^2 = 0 \rightarrow x = 0$.
Logo, a única interseção é (0, 4).

Resposta correta: C

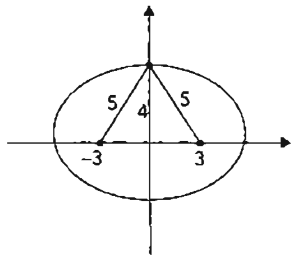
9. Em toda elipse, temos $PF_1 + PF_2 = 2a$
Considere a equação E: $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$. Assim:

$\dfrac{25x^2}{225}+\dfrac{9y^2}{225}=\dfrac{225}{225} \rightarrow E: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$
$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
Como $PF_1 + PF_2 = 2a \rightarrow PF_1 + PF_2 = 10$

Resposta correta: E

10. A(–3, 0), B(3, 0) e P(x, y). Em que $\overline{PA}+\overline{PB}=10$.
Como a soma é fixa, temos uma elipse de focos A(–3, 0) e B(3, 0).



Tomando P(0, y) descobrimos que b = 4.
Como $b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow a = 5$.

Logo: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \rightarrow 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

Resposta correta: C

(PÁGINAS 58 E 59)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Da equação temos:
I. Centro (4, – 3)

II. $a^2 = 25$
$a = 5$

III. $b^2 = 16$
$b = 4$

(V) 2a (eixo maior) = 10
(V) $e = \dfrac{c}{a} \rightarrow e = \dfrac{3}{5}$

IV. $a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 4^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Os focos serão:
$F_1\,(4 + 3, -3) \rightarrow F_1\,(7, -3)$
$F_2\,(4 - 3, -3) \rightarrow F_2\,(1, -3)$

Resposta correta: E

2. Lembrando:
   - Se a equação da elipse for do tipo: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, as coordenadas dos focos são $F_1(x_0 - C;\ y_0)$ e $F_2(x_0 + C,\ y_0)$
   - Se a equação da elipse for do tipo: $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$, as coordenadas dos focos são: $F_1(x_0;\ y_0 - C)$ e $F_2(x_0;\ y_0 + C)$

I. Considere a equação $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y-6)^2}{16}=1$.

$$\left.\begin{aligned}a^2=25 \rightarrow a=5\\ b^2=16\rightarrow b=4\end{aligned}\right\}\ a^2=b^2+c^2 \rightarrow 25=16+c^2 \rightarrow \underline{c=3}$$

C(4; 6)

II. As coordenadas dos focos são: $F_1(4 - 3;\ 6) = F(1;\ 6)$ e $F_2(4 + 3;\ 6) = F_2(7;\ 6)$

Resposta correta: A

3. Para encontrarmos os pontos de interseção, devemos resolver o sistema com as equações da reta e da elipse:

$$\begin{cases}y = ax + 1\\ x^2+4y^2=1\end{cases}$$

$x^2 + 4\,(ax + 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4\,(a^2x^2 + 2ax + 1) = 1$
$x^2 + 4a^2x^2 + 8ax + 4 = 1 \Rightarrow (1 + 4a^2)x^2 + 8ax + 3 = 0$
$\Delta = (8a)^2 - 4\,.\,(1 + 4a^2)\,.\,3$
Para a reta ser tangente, é necessário que $x' = x''$, ou seja, $\Delta = 0$.
$64a^2 - 12 - 48a^2 = 0 \Rightarrow 16a^2 = 12$
$16a^2 = 12 \quad \div 2$
$8a^2 = 6$
$a^2 = \dfrac{3}{4}$
$a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta correta: A

4. I.

$$E:\begin{cases}x=2+2\cos t\\ y=4+3\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\cos t\\ \dfrac{y-4}{3}=\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{4}=\cos^2 t\\ \dfrac{(y-4)^2}{9}=\operatorname{sen}^2 t\end{cases}\ +$$

$$E:\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$$

II. Assim, temos centro C(2; 4)
$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow 2a = 6$
$b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow 2b = 4$

Resposta correta: C

5. Temos, $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$. Precisamos completar o quadrado perfeito para encontrarmos o centro.
$x^2 - 4x + 4 - 4 + 4y^2 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + 2y^2 = 4 \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1.$
Equação da elipse de centro: (2, 0).
Queremos uma reta $y = -ax + b$ passando por (2, 0) e (3, −2) $\rightarrow a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2}{1}=-2$. $y=-2x+b \rightarrow 0=-4+b\rightarrow$
$\rightarrow b = 4$
Temos, $y = -2x + 4 \rightarrow y + 2x - 4 = 0$.

Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. O centro da elipse de equação $E:\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$ é C(2; 0).
Como a reta **r** passa pelos pontos C(2; 0), A(3; −2) e P(3; K), então Det(m) = 0.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 0 & \\ & 3 & -2 & \\ 0 & 3 & k & -4\\ 6 & 2 & 0 & 3k\\ -2k & & & 0\end{array}=0 \qquad K+2=0 \rightarrow K=-2$$

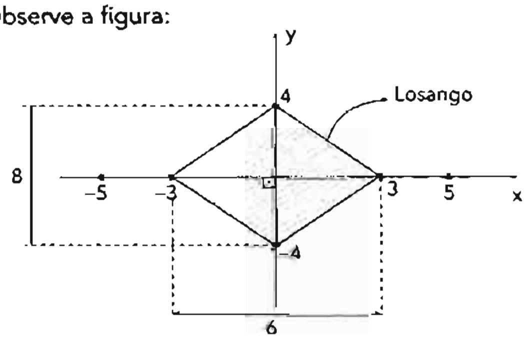
Resposta correta: D

2. I. Seja a elipse de equação $E:\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$.

$$\left.\begin{aligned}a^2=25 \rightarrow a=5\\ b^2=16\rightarrow b=4\end{aligned}\right\}\ a^2=b^2+c^2 \rightarrow \underline{c=3}$$

II. Os focos da elipse são $F_1(x_0 - C;\ y_0)$ e $F_2(x_0 + C;\ y_0)$.
Assim, $F_1(2 - 3;\ 1) = F_1\,(-1;\ 1)$ e $F_2(2 + 3;\ 1) = F_2(5;\ 1)$

III. Observe a figura:



$A_{losango}=\dfrac{6\,.\,8}{2}=\underline{24}$

Resposta correta: C

3. Pela figura: a = 5, b = 4 e a elipse está centrada em (5, 4). Logo temos que a equação é da forma:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1.$$

Logo, $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$

Resposta correta: C

4. Reduzindo a equação da elipse:
$3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52 = 0$
$3x^2 - 24x + 4y^2 - 16y = -52$
$3(x^2 - 8x \quad) + 4(y^2 - 4y \quad) = -52$
$3(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 4y + 4) = -52 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 4$
$3(x-4)^2 + 4(y-2)^2 = 12 \quad (\div 12)$

$$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$$

I. $a^2 = 4$
II. $b^2 = 3$
III. $a^2 = b^2 + c^2$
$4 = 3 + c^2$
$c^2 = 1$
$c = 1$

IV. $\overline{F_1F_2} = 2c$
$\overline{F_1F_2} = 2 \cdot 1$
$\overline{F_1F_2} = 2$

Resposta correta: D

5. Seja a equação:

$$E:\begin{cases}x=3+5\cos t\\ y=-2+3\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{x-3}{5}=\cos t\\ \frac{y+2}{3}=\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\frac{(x-3)^2}{25}=\cos^2 t\\ \frac{(y+2)^2}{9}=\operatorname{sen}^2 t\end{cases}+$$

$$E:\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

Resposta correta: B

6. Temos a equação $\frac{(x+1)^2}{169}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$. Como uma elipse é da forma $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)}{b^2}=1 \rightarrow$

$$\rightarrow\begin{cases}x_c=-1\\ y_c=7\\ a=13\\ b=5\end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 144 \rightarrow c = 12$.

$$\begin{cases}\text{eixo maior}: 2a=26\\ \text{eixo menor}: 2b=10\\ \text{distância focal}: 2c=24\\ \text{centro}: (x_c, y_c)=(-1, 7)\end{cases}$$

Resposta correta: D

7. I. $E:\begin{cases}x=1+2\cos t\\ y=2+\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\cos t\\ y-2=\operatorname{sen} t\end{cases}\rightarrow$

$$\rightarrow\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{4}=\cos^2 t\\ (y-2)^2=\operatorname{sen}^2 t\end{cases}+$$

$$E:\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$$

II. Desenvolvendo $\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$, temos:

$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 16y + 16 = 4 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

Resposta correta: A

8. Pela definição de elipse temos $PF_1 + PF_2 = 2a$ (constante).

Resposta correta: D

9. $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3x^2 - 12x + 4y^2 + 16y + 16 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3(x^2 - 4x + 4) - 12 + 4(y^2 + 4y + 4) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3(x-2)^2 + 4(y+2)^2 = 12 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$

Logo, $a^2 = 4 \rightarrow a = 2$ e $b^2 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$.
Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 4 = 3 + c^2 \rightarrow c = 1$.
Logo, a = 2 e b > c.

Resposta correta: C

10. Temos $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Como uma elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Temos a = 5 e b = 9.
Sabemos também que $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 25 - 9 = 16 \rightarrow$
$\rightarrow c = 4$.
Os focos F_1 e F_2 são dados por (4, 0) e (–4, 0). Logo, temos os pontos P(2, –8), F_1(4 ,0) e F_2(–4, 0), cuja área é dada pelo determinante:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & -8 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|32+32|=32\text{ua.}$$

Resposta correta: D

(Páginas 61 e 62)

Atividades para Sala

1. Considere a equação da hipérbole:
$H:\frac{(x+5)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. Temos que o primeiro denominador (144) é sempre a^2 e o outro (25) é b^2. Assim:

$$\left.\begin{matrix}a^2=144 \rightarrow a=12\\ b^2=25 \rightarrow b=5\end{matrix}\right\rangle c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=13$$

$$e=\frac{c}{a} \rightarrow e=\frac{13}{12}$$

Resposta correta: E

2. Temos a hipérbole $H: \begin{cases} x = 4.\sec t \\ y = 3.\text{tg}\, t \end{cases}$, assim podemos:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \sec t \\ \frac{y}{3} = \text{tg}\, t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} = \sec^2 t \\ \frac{y^2}{9} = \text{tg}^2 t \end{cases} -$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \sec^2 t - \text{tg}^2 t$$

Então $\sec^2 t - \text{tg}^2 t = 1$. Assim $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \sec^2 t - \text{tg}^2 t$, fica $H: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Resposta correta: E

3. Eixo real = 8 → 2a = 8 → $\underline{a = 4|}$

$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{5}{\cancel{4}} = \frac{c}{\cancel{4}} \rightarrow \underline{c = 5|}$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 5^2 = 4^2 + b^2 \rightarrow \underline{b = 3|}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{9x^2 - 16y^2}{\cancel{144}} = \frac{144}{\cancel{144}} \rightarrow$

$\rightarrow 9x^2 - 16y^2 - 144 \underline{= 0|}$

Resposta correta: E

4. A equação de uma hipérbole é dada por:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Pelo gráfico: $\begin{cases} a = \overline{0A_2} = \frac{\overline{A_1A_2}}{2} = 4 \\ c = \overline{0F_2} = \frac{\overline{F_1F_2}}{2} = 5 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3$.

Logo, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Resposta correta: B

5. Pela definição de hipérbole, temos $|PF_1 - PF_2| = 2a$

Da equação $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{144} = 1$, temos:

$\left.\begin{matrix} a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \\ b^2 = 144 \rightarrow b = 12 \end{matrix}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \underline{c = 13|}$

Assim, $|PF_1 - PF_2| = 10$

Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Da equação da hipérbole $H: \frac{y^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$, temos:

I. Eixo real vertical
II. $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow 2a = 8$ (eixo real)
$b^2 = 25 \rightarrow b = 5 \rightarrow 2b = 10$ (eixo imaginário)
III. Centro C(–3; 0)

Resposta correta: E

2. Considere a hipérbole de equação $H: \begin{cases} x = 3 + 4\sec t \\ y = -2 + 3\text{tg}\, t \end{cases}$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{4} = \sec t \\ \frac{y+2}{3} = \text{tg}\, t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{16} = \sec^2 t \\ \frac{(y+2)^2}{9} = \text{tg}^2 t \end{cases} -$$

$$H = \frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Resposta correta: E

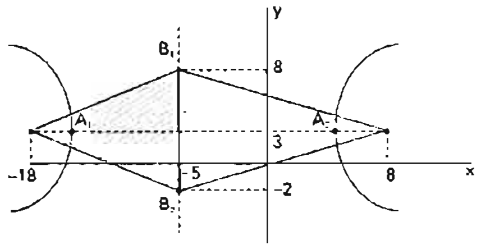
3. Se $\frac{(x+5)^2}{144} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$, então:

Hipérbole com eixo real horizontal:

$\left.\begin{matrix} a^2 = 144 \rightarrow a = 12 \\ b^2 = 25 \rightarrow b = 5 \end{matrix}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \underline{c = 13|}$

$F_1(x_0 - C; y_0) = F_1(-5 - 13; 3) = F_1(-18; 3)$
$F_2(x_0 + C; y_0) = F_2(-5 + 13; 3) = F_2(8; 3)$

Centro C(–5; 3)
Observe a figura:



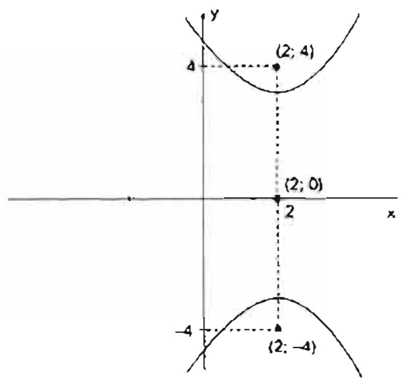
$A = \frac{\overset{13}{\cancel{26}}.10}{\cancel{2}} \rightarrow \underline{A = 130|}$

Resposta correta: C

4. Se uma hipérbole é equilátera, então a = b.

$2c = 8 \rightarrow \underline{c = 4|}$

$a^2 + b^2 = c^2$, fazendo a = b, $\cancel{2}a^2 = \cancel{16} \rightarrow a^2 = 8 \rightarrow b^2 = 8$



$$\frac{(y-0)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1 \rightarrow H: \frac{y^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1|$$

Resposta correta: $H: \frac{y^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1|$

5. Vamos encontrar o centro da elipse E: $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;\ C(0;\ 0)$$

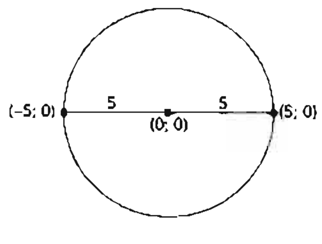
Vamos encontrar os focos da hipérbole:
H: $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 16 \rightarrow \boxed{a = 4} \\ b^2 = 9 \rightarrow \boxed{b = 3} \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \boxed{c = 5}$$

$F_1(-5;\ 0)$ e $F_2(5;\ 0)$

Considere a circunferência abaixo:



λ: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (5)^2$
λ: $\boxed{x^2 + y^2 - 25 = 0}$

Resposta correta: C

6. Pela equação $H: \frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{8} = 1$, temos

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 4 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ \boxed{b^2 = 8} \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 4 + 8 \rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{3}}$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{e = \sqrt{3}}$$

Resposta correta: B

7. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$ é uma circunferência de centro C(2; –2) e raio r = 3.
$y = x^2 - 7x + 12$ é uma parábola.
$x^2 - y^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 - y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ é uma hipérbole equilátera, pois $a^2 = b^2 \rightarrow a = b$.

$x^2 - y^2 = 0 \rightarrow (x + y)(x - y) = 0$ → $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, um par de retas.

Resposta correta: C

8. I. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 4x + 2 - 2 - 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 14 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 14$.
É uma circunferência de raio $\sqrt{14}$.

II. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0 \rightarrow 4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y - 11 = 0$
$\rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) - 16 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 - 11 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 36 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.
Elipse de eixo maior 3 e menor 2. E centrada em (2, 1).

III. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow$
$\rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Hipérbole.

Resposta correta: E

9. Se a hipérbole é equilátera, então a = b.
$2a = 8 \rightarrow a = \boxed{b = 4}$
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 16 \rightarrow \boxed{c = 4\sqrt{2}}$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{4\sqrt{2}}{4} \rightarrow \boxed{e = \sqrt{2}}$$

Resposta correta: A

10. Pelo gráfico, temos: $\begin{cases} 2c = \overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5 \\ a = 3 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

Daí: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Resposta correta: E

(PÁGINAS 62 E 63)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Considerando a equação $H: \frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$, temos:
$a^2 = 16 \rightarrow a = b \boxed{= 4}$
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 16 \rightarrow c = \boxed{4\sqrt{2}}$

Resposta correta: E

2. Considere a equação H: $64x^2 - 16y^2 - 1024 = 0$. Assim, temos:

$$64x^2 - 16y^2 = 1024 \rightarrow \frac{64x^2}{1024} - \frac{16y^2}{1024} = \frac{1024}{1024} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
$b^2 = 64 \rightarrow b = 8$
Centro C(0; 0)
A hipérbole tem eixo real horizontal, assim suas assíntotas são do tipo $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, em que $(x_0;\ y_0)$ é o centro.

$$y = \pm\frac{8}{4}x \rightarrow y = \pm 2x$$

Resposta correta: E

3. Temos, $\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{4} = 1$. Logo a = 4 e b = 2.
Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5}$.
Logo, $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Resposta correta: C

4. Dada a equação H: $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Transformando-a para a forma reduzida, temos:

$$16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \\ b^2 = 16 \rightarrow b = 4 \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 16$$

$$\rightarrow c = \sqrt{5} \rightarrow \underline{c = 5}$$

Distância focal (2c) = $\underline{10}$

5. Temos a equação $H: \begin{cases} x = 6\sec t \\ y = 8\text{tg}\, t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{6} = \sec t \\ \frac{y}{8} = \text{tg}\, t \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{36} = \sec^2 t \\ \frac{y^2}{64} = \text{tg}^2 t \end{cases} -$$

$$H: \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta correta: B

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Da equação, temos:

$$\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{4} = 1$$

I. $a^2 = 16$
$a = 4$

II. $b^2 = 4$
$b = 2$

III. c (9, 7)

Eixo imaginário = 2b = 4
Eixo real = 2a = 8

Resposta correta: C

2. Reduzindo a equação:
$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
$9y^2 - 16x^2 = 144 \quad \div 144$

$$\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Resposta correta: C

3. Comparando com a equação da hipérbole, teremos:
I. $a^2 = 144$
$a = 12$

II. $b^2 = 169$
$b = 13$

Resposta correta: C

4. Se a hipérbole é equilátera, então a = b.
Se os focos são $F_1(8; 0)$ e $F_2(-8; 0)$, então c = 8.
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 2a^2 = 64 \rightarrow a^2 = 32$ e $b^2 = 32$

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$$

Resposta correta: A

5. Temos a hipérbole H: $4x^2 - 8y^2 = 1 \rightarrow H: \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{8}} = 1$

Como o eixo real é horizontal, as assíntotas são do tipo

$$y - y_0 = \pm \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} x \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Resposta correta: C

6. Seja $x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.
Daí: a = 2 e b = 1. Sabemos que a assíntota é dada por $y = \pm\frac{b}{a}x$. Logo $y = \pm\frac{1}{2}x \rightarrow 2y \pm x = 0$. Logo $2y + x = 0$ é assíntota.

Resposta correta: A

7.

$$\begin{cases} x = 2\text{sen}\, t \\ y = 2\cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\text{sen}^2 t \\ y^2 = 4\cos^2 t \end{cases} +$$

$$x^2 + y^2 = 4(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)$$

$\rightarrow x^2 + y^2 = 4$. A equação representa uma circunferência.
$(x - 3)^2 = 4(y - 1)$ representa uma parábola.
$x^2 - y^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 - y^2 = -1 \rightarrow y^2 - x^2 = 1$ representa uma hipérbole equilátera com eixo real vertical.
$x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0 \rightarrow (x + y)^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (x+y)^2 - 2^2 = 0 \rightarrow (x+y+2)(x+y-2) = 0 \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

um par de retas.

Resposta correta: C

8. Da equação H: $x^2 - 3y^2 = 12$, temos:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 12 \rightarrow a = 2\sqrt{3} \\ b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 12 + 4 \rightarrow \underline{c = 4}$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}\sqrt{3}} \rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Eixo real (2a) = $4\sqrt{3}$

Eixo imaginário (2b) = 4

$$e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como o eixo real e horizontal, suas assíntotas são do tipo $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$. Sabendo que o centro é C(0; 0), temos:

$$y = \pm\frac{2}{2\sqrt{3}}x \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow \pm\sqrt{3}x - 3y = 0$$

Resposta correta: D

9.

$$\begin{cases} x = 3 + 2\sec t \to 4\sec^2 t = (x-3)^2 \to 16\sec^2 t = 4(x-3)^2 \\ y = 2 + 4\text{tg}t \to 16\text{tg}^2 t = (y-2)^2 \end{cases}$$

Como $\sec^2 t = 1 + \text{tg}^2 t \to 16\sec^2 t - 16\text{tg}^2 t = 16$.
Substituindo: $4(x-3)^2 - (y-2)^2 = 16 \to$

$$\to \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Portanto: $a = 2$ e $b = 4 \to c^2 = a^2 + b^2 \to c = 2\sqrt{5}$

$$\text{Daí: } \begin{cases} \text{eixo real}: 2a = 4 \\ \text{eixo imaginário}: 2b = 8 \\ \text{distância focal}: 2c = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Resposta correta: A

10. Seja $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$. Daí: $a = 4$ e $b = 3$.

Sabendo que a assíntota é dada por $y = \pm\frac{a}{b}x + k$ e que ela passa pelo centro C(2, 4). Temos: $y = \pm\frac{3}{4}x + k$. Substituindo C(2, 4) $\to 4 = \pm\frac{3}{4}2 + k \to k = \frac{5}{2}$ ou $\frac{11}{2}$.

Temos: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \to 3x - 4y + 10 = 0$.

Resposta correta: D

(PÁGINAS 65 E 66)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Comparando a equação $(x + 5)^2 = 8(y - 4)$ com a equação $(x - x_0)^2 = 2P(y - y_0)$, sendo $V(x_0; y_0)$ e P o parâmetro, temos:
V(–5; 4)
$2P = 8 \to P = 4$

Resposta correta: D

2. Se a parábola tem concavidade para a direita, temos a equação $(y - y_0)^2 = 2P(x - x_0)$.
Se $P = 8 \to 2P = 16$
Se V(4; –2), então $x_0 = 4$ e $y_0 = -2$
Substituindo os valores, temos a equação:
$(y + 2)^2 = 16(x - 4) \to y^2 + 4y + 4 = 16x - 64 \to$
$y^2 + 4y - 16x + 68 = 0$

Resposta correta: $y^2 + 4y - 16x + 68 = 0$

3. Sabendo que uma parábola é dada por:

$$(y - y_c)^2 = 2P(x - x_c) \text{ e } \begin{cases} \frac{P}{2} = 3 \to P = 6 \\ x_c = 0 \text{ e } y_c = 3 \end{cases}$$

Temos $(y - 3)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (x - 0) \to (y - 3)^2 = 12x \to$
$\to y^2 - 6y - 12x + 9 = 0$.

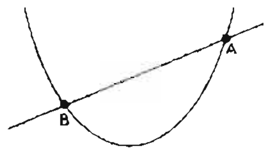
Resposta correta: A

4. Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + y = -1 & (\text{I}) \\ x^2 - y = 4 & (\text{II}) \end{cases}$, temos:

(I) $y = -2x - 1$
(II) $x^2 - (-2x - 1) = 4 \to x^2 + 2x + 1 - 4 = 0 \to x^2 + 2x - 3 = 0$;
$x' = -3$ e $x'' = 1$

Para $x = -3 \to y = -2(-3) - 1 \to y = 5$; A(–3; 5)
Para $x = 1 \to y = -2(1) - 1 \to y = -3$; B(1; –3)

Observe a figura:



$$d_{A,B} = \sqrt{(1+3)^2 + (5+3)^2}$$
$$d_{A,B} = \sqrt{16 + 64}$$
$$d_{A,B} = \sqrt{80}$$
$$d_{A,B} = 4\sqrt{5}$$

Resposta correta: D

5. Escrevendo a equação $y^2 - 2y + 6x + 13 = 0$, na forma $(y - y_0)^2 = 2P(x - x_0)$, temos:

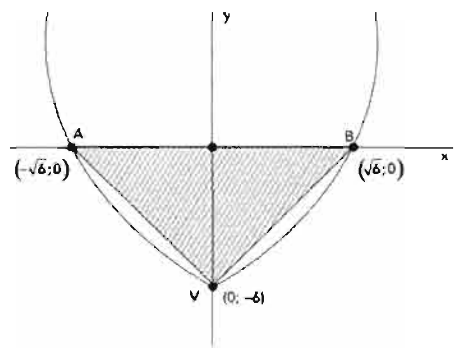
$y^2 - 2y + 1 = -6x - 13 + 1$

$(y - 1)^2 = -6(x + 2)$; V(–2; 1) e $2P = -6 \to P = -3$

Resposta correta: D

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Considere a parábola $y = x^2 - 6$. O vértice da parábola é: $V(x_v; y_v)$, em que $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Assim: $x_v = 0$ e $y_v = -6$; V(0; –6)
Os pontos em que o gráfico corta o eixo **x** são quando $y = 0$.
$x^2 - 6 = 0 \to x = -\sqrt{6}$ ou $x = \pm\sqrt{6}$
Observe a figura:



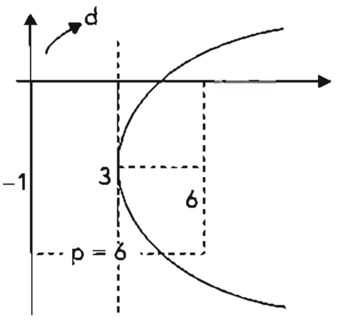
$$\text{Área}_{(AVB)} = \frac{\cancel{2}\sqrt{6} \cdot 6}{\cancel{2}} \to \text{Área}_{(AVB)} = 6\sqrt{6}$$

Resposta correta: B

2. $y^2 + 2y - 12x + 37 = 0$. Sabendo que uma parábola é dada por $(y - y_c)^2 = 2p(x - x_c) \to$
$\to y^2 - 2yy_c + y_c^2 - 2px + 2px_c = 0$
Igualando as duas equações: $2p = 12 \to p = 6$ e $y_c = -1$
Também $y_c^2 + 2px_c = 37 \to 1 + 12x_c = 37 \to x_c = 3$

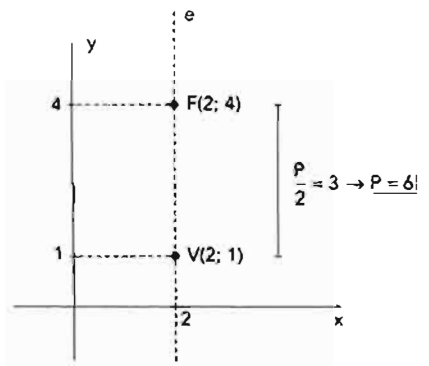
Sabendo que, se $C(x_c, y_c)$ é centro $\rightarrow F\left(x_c + \frac{P}{2}, y_c\right)$ foco, pois F e C pertencem a mesma linha perpendicular à diretriz $\rightarrow F(3 + 3, 1) \rightarrow (F(6, -1)$

Também d: $x = x_c - \frac{P}{2} = 0 \rightarrow$ d: $x = 0$.



Resposta correta: $F(6, -1)$; $d \rightarrow x = 0$

3. Sabemos que o vértice e o foco da parábola estão no eixo de simetria.



Como o foco sempre está no "interior" da parábola, então a equação é do tipo $(x - x_0)^2 = 2P(y - y_0)$, no qual $(x_0; y_0)$ é o vértice. Assim, temos:
$(x - 2)^2 = 12(y - 1)$
$x^2 - 4x + 4 = 12y - 12$
$x^2 - 4x - 12y + 16 = 0$

Resposta correta: A

4. Da equação $y = x^2 - 4x + 5$, temos:
$x_v = \frac{-b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{4}{2} \rightarrow \underline{x_v = 2}$
$y_v = (2)^2 - 4(2) + 5 \rightarrow y_v = 4 - 8 + 5 \rightarrow \underline{y_v = 1}$ V(2; 1)
A distância do ponto V(2; 1) à reta $y = 3x - 4y - 12$ é:
$d_{v,r} = \frac{|3.(2) - 4(1) - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow d_{v,r} = \frac{|6 - 4 - 12|}{\sqrt{25}} \rightarrow$
$d_{v,r} = \frac{10}{5} \rightarrow \underline{d_{v,r} = 2}$

Resposta correta: A

5. $y - 1 = m(x - 1)$ e $y = x^2$. Se a seta é tangente, então a equação $x^2 - 1 = m(x - 1)$ deve ter somente uma solução. Daí, $x^2 - mx + m - 1 = 0 \rightarrow$
$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m - 2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$.

Resposta correta: B

6. Temos r//s e s: $3x - y - 10 = 0 \rightarrow y = 3x - 10$.
Daí $y = mx + c \rightarrow m = 3 \rightarrow y = 3x + c$.
Se P(1, y) é interseção de $y = x^2 - 4$ e $y = 3x + c \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 4 = 3x + c$ e $x = 1 \rightarrow 1 - 4 = 3 + c \rightarrow c = -6$.
Portanto, $y = 3x - 6 \rightarrow 3x - y - 6 = 0$.

Resposta correta: C

7. Atenção!

A parábola tem vértice na origem, concavidade para direita e eixo de simetria horizontal. Assim, a parábola tem equação $y^2 = 2Px$

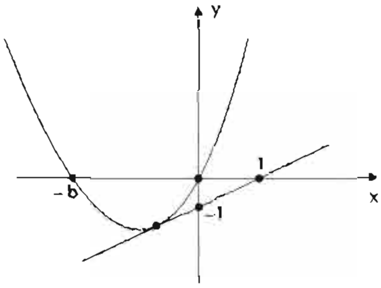
Temos P = 4. Assim, $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x \rightarrow y^2 = 8x \rightarrow y^2 - 8x = 0$

Resposta correta: B

8. $x^2 - 4x + 6y - 14 = 0 \rightarrow 6y + x^2 - 4x + 4 - 4 - 14 = 0$
$6y + (x - 2)^2 - 18 = 0 \rightarrow 6y - 18 = -(x - 2)^2 \rightarrow$
$\rightarrow 6(y - 3) = -(x - 2)^2 \rightarrow (y - 3) = -\frac{1}{6}(x - 2)^2$. Que é a equação de uma parábola.

Resposta correta: A

9. I. Dada a parábola $y = x^2 + bx$ e a reta r : $y = x - 1$



II. Resolvendo o sistema:
$\begin{cases} y = x^2 + bx \\ y = x - 1 \end{cases}$, temos:
$x - 1 = x^2 + bx \rightarrow x^2 + bx - x + 1 = 0 \rightarrow$
$x^2 + (b - 1)x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (b - 1)^2 - 4(1)(1)$
$\Delta = b^2 - 2b + 1 - 4$
$\Delta = b^2 - 2b - 3$

Como só tem um ponto em comum, temos:
$b^2 - 2b - 3 = 0$
$b = -1$ ou $b = 3$

Resposta correta: A

10. Seja **p** a parábola de equação p : $y = ax^2 + bx + c \rightarrow$
É dado que (0, 0), (2, 4) 0 **p.**
Tem-se: $c = 0$ e $4 = 4a + 2b + c \rightarrow 2a + b = 2$
Como $y = 4$ é tangente, então a equação:
$4 = ax^2 + bx + c$ tem solução única $\rightarrow$
$\rightarrow ax^2 + bx - 4 = 0$ $(c = 0)$
$\rightarrow \Delta = b^2 + 16a = 0$. Como $2a = 2 - b \rightarrow$
$b^2 + 8(2 - b) = 0 \rightarrow b^2 - 8b + 16 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (b - 4)^2 = 0 \rightarrow b = 4$
Substituindo em $2a + b = 2 \rightarrow 2a = -2 \rightarrow a = -1$
Daí: $a + b + c = -1 + 4 + 0 = 3$.

Resposta correta: A

Módulo 1

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

(PÁGINAS 70 E 71)

ATIVIDADES PARA SALA

1. **Dados:**
$M = 50g = 5 \cdot 10^{-2}kg$
$K = 32N/m$
$A = 30cm = 0,3m$
$\theta_0 = \pi$ rad
Logo, temos
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3,2}{5 \cdot 10^{-2}}} \rightarrow \omega = \frac{8rad}{s}$$
$V = -\omega A \cdot sen(\theta_0 + \omega t) = -8 \cdot 0,3 \cdot sen(\pi + 8t)$
$V = -2,4 \cdot sen(8 \cdot t + \pi)$

Resposta correta: A

2. $$E_M = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 10^3 \cdot 0,2^2}{\cancel{2}} = 40J \text{ . (total)}$$
$E_C = E_P$
$$E_M = E_C + E_P \rightarrow 40 = 2 \cdot E_C \rightarrow 20 = \frac{mv^2}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0,1 \cdot v^2 = 40 \rightarrow v^2 = 400 \rightarrow \boxed{v = 20m/s}$$

Resposta correta: A

3. **Sistema massa-mola**
O período de oscilação é dado por:
$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$
O intervalo de tempo para o corpo C ir de A até B corresponde à metade do período.
Logo, $\frac{T_1}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$
Pêndulo simples
O período de oscilação do pêndulo simples é dado por:
$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$
Sendo $\frac{T_1}{2} = T_2$, temos:
$$\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$
$$\frac{m}{k} = 4 \cdot \frac{\ell}{g}$$
$$k = \frac{m \cdot g}{4\ell}$$
$$k = \frac{1,00 \cdot 10^{-1} \cdot 10}{4 \cdot 0,50}$$
$$\boxed{k = 0,50\frac{N}{m}}$$

Resposta correta: B

4. I. Nesse caso, a aceleração responsável pelo movimento do pêndulo é a própria aceleração da gravidade **g**.
II. Nesse caso, haverá uma aceleração aparente maior do que **g**. Nessa situação o período do pêndulo simples diminui em relação à primeira situação.
III. Nesse caso, haverá uma aceleração aparente menor do que **g**. Nessa situação o período aumenta em relação às situações anteriores.

Resposta correta: B

5. O período de um pêndulo simples é dado por:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$
Note que, para que o período do pêndulo dobre, o comprimento do fio deverá ser quadruplicado. Logo, para um fio no pêndulo de comprimento L, o seu comprimento deverá passar para 4L para que o período do mesmo dobre, ou seja, é necessário um aumento de 3L no comprimento do fio do pêndulo simples.

Resposta correta: C

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. $x = 4 \cdot sen(2t)$
$x = A \cdot sen(\omega t + \theta_0)$
Logo:
$$\omega = 2 \rightarrow 2\pi f = 2 \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{\pi}Hz}$$

Resposta correta: D

2. $$x = 0,3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2t\right)$$
$x = A \cdot \cos(\theta_0 + \omega t_0)$
$A = 0,3m$ e $\omega = 2$ rad/s
Logo:
$$v_{máx} = \omega \cdot A = 2 \cdot 0,3 \rightarrow \boxed{v_{máx} = 0,6m/s}$$

Resposta correta: C

3. **Dados:** $m = 4kg$
$k = 25\pi^2 N/m$
Logo, temos:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{25\pi^2}}$$
$$T = 2\pi \cdot \frac{2}{5\pi} \rightarrow \boxed{R = 0,80s}$$

Resposta correta: E

4. Pelo gráfico, temos:
$$E_P = \frac{kx^2}{2} \rightarrow 1 = \frac{k \cdot 1^2}{2} \rightarrow k = 2N/m$$
a) **Incorreta.** $E_M = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{2 \cdot 2^2}{2} \rightarrow E_M = 4J$
b) **Correta.** Em $x = 0$, $E_C = \frac{mv^2}{2} \rightarrow$
$$\rightarrow E_C = \frac{0,5 \cdot v^2}{2} \rightarrow 4 = \frac{0,5 \cdot v^2}{2} \rightarrow 4m/s.$$

c) **Correta**. Para x = 0, $v_{máx}$ e a_{nula}.
d) **Correta**. $E_c + E_p = 4 \rightarrow E_c + 1 = 4 \rightarrow \boxed{E_c = 3J}$

Resposta correta: A

5.
I. **Correta**. Ponto de velocidade máxima.
II. **Incorreta**. Note que a velocidade da partícula varia.
III. **Correta**. Nessas posições a velocidade é nula.
IV. **Incorreta**. A energia cinética é máxima.

Resposta correta: C

6.
I. Incorreta. O período é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, ou seja, ele depende da massa.
II. **Correta**. O sistema é conservativo.
III. **Correta**. Esse é o ponto de velocidade máxima.

Resposta correta: E

7. a) Incorreta. A aceleração nesses pontos é máxima.
b) Incorreta. Do gráfico temos:
$$E_M = \frac{k \cdot A^2}{2} \Rightarrow 200 = k \cdot \frac{(0,1)^2}{2} \Rightarrow k = 4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$
$$F = k \cdot x_{máx} = 4 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \Rightarrow F = 4 \cdot 10^3 N$$
c) Incorreta. A constante vale $4 \cdot 10^4$ N/m
d) **Incorreta**. $E_p = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{2} \Rightarrow E_p = 5 \cdot 10^3 J$
e) **Correta**.
$$E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow 200 = \frac{1 \cdot v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 400 \Rightarrow \boxed{v = 20m/s}$$

Resposta correta: E

8. I. **Incorreta**. O movimento só será harmônico simples, caso a força restauradora for proporcional à elongação do móvel.
II. **Correta**. Pois a aceleração tem o mesmo sentido da força restauradora.
III. **Incorreta**. O período é diretamente proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio do pêndulo.

Resposta correta: C

9. Note, pelo enunciado, que a frequência de B é duas vezes maior do que a de A. Logo o período de A é duas vezes maior que o período de B, logo o comprimento do fio de A é quatro vezes maior que o comprimento do fio do pêndulo B.

Resposta correta: A

10. O período desse sistema é dado por:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
Para a nova massa, temos:
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$$
$$T' = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T' = 2 \cdot T = 2 \cdot 16 \Rightarrow \boxed{T' = 32s}$$

Resposta correta: D

Módulo 2

FÍSICA MODERNA
(PÁGINAS 74 A 76)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Da frequência natural:
$$W = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow K = m \cdot W^2 = 3,3 \cdot (10)^2 \Rightarrow \boxed{K = 330\frac{N}{m}}$$
A energia dos "n" fótons é transferida ao sistema massa-mola, logo:
$$N.h.f = \frac{K \cdot \Delta x^2}{2} \Rightarrow \eta = \frac{K.\Delta x^2}{2 \cdot h \cdot f} \Rightarrow$$
$$\eta = \frac{330 \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 500 \cdot 10^{12}} \Rightarrow \boxed{\eta = 5 \cdot 10^{14} \text{ fótons}}$$

Resposta correta: D

2. $E = h \cdot f \Rightarrow E = h \cdot \frac{V}{\lambda} \Rightarrow E = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3.10^8}{600 \cdot 10^{-9}}$
$E = 3,3 \cdot 10^{-19}$ J

Resposta correta: C

3. $\lambda(máx) \cdot T \approx 3 \cdot 10^3$ (μm k)
$$T \approx \frac{3.10^3}{\lambda(máx)} \frac{(\cancel{\mu m}K)}{\cancel{\mu m}}$$
$$T \approx \frac{3.10^3}{1,4} \Rightarrow \boxed{T \approx 2000K}$$
Note que λ (máx) diminui quando a temperatura aumenta.

Resposta correta: C

4. I. **Incorreta**. *f* é a frequência da radiação eletromagnética incidente no metal.
II. **Correta**. Comparando, $K_{máx} = B \cdot f - C$ com $E_{c_{(máx)}} = h.f - \varnothing$, concluímos que B = h. A unidade de h no S.I. é J.s.
III. **Correta**. Comparando, C = ∅, onde ∅ é a função trabalho e corresponde a energia mínima necessária para arrancar elétrons do metal. Sua unidade no S.I é Joule.

Resposta correta: D

5. $E_{cinética} = E$
$$\frac{1}{2}mv^2 = h.f$$
Mas, $v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$
Logo
$$\frac{1}{2}mv^2 = h.\frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2h}{m.v}$$
como $\lambda \propto \frac{1}{v}$ se a velocidade é reduzida à metade, o comprimento de onda dobra. Portanto, $\boxed{v = 5,00 \cdot 10^{-12} m}$

Resposta correta: B

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. A menor energia do fóton que produz fotoelétrons é:

$$E = h.f = h.\frac{C}{\lambda} = \frac{6,6.10^{-34}.\ 3,0\ .10^{8}}{6,0\ .\ 10^{-7}} = 3,3.10^{-19}\,J$$

Para que os fotoelétrons saiam com energia cinética de 3,0 e V = 3,0 x 1,6 x10^{-19}J = 4,8 . 10^{-19}J, a frequência dos fótons deve ser:

$$f = \frac{3,3.10^{-19} + 4,8.10^{-19}}{6,6.10^{-34}} \Rightarrow f = 12.10^{14}\,Hz$$

Resposta correta: A

2. A menor energia do fóton que produz fotoelétron é:

$$E = h\ .\ f = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6,6\ .\ 10^{-34}.3,0.10^{8}}{6,0.10^{-7}} = 3,3.10^{-19}\,J$$

Expressando em eV, vem:

$$\frac{3,3\ .\ 10^{-19}}{1,6.10^{19}} \Rightarrow \boxed{2,1eV}$$

Resposta correta: B

3. Do gráfico vemos que para uma temperatura de 300k a radiação emitida pela lâmpada está fora da faixa visível.

Resposta correta: D

4. O efeito fotoelétrico é a emissão de elétrons a partir de uma placa metálica iluminada por luz de determinada frequência, logo a velocidade dos elétrons ejetados depende da cor da luz incidente.

Resposta correta: D

5. Para o fóton:

$$E_o = h\ .\ f_F = h.\frac{c}{\lambda_F} \Rightarrow \lambda_F = \frac{h.c}{E_o}$$

O comprimento de onda do elétron é dado por:

$$Q_E = \frac{h}{\lambda e_z} \Rightarrow \lambda e = \frac{h}{Q_E} \quad (1)$$

$$E_o = \frac{Q_E}{2m} \Rightarrow Q_E = \sqrt{2mE_o} \quad (2)$$

(2) em (1):

$$\lambda e = \frac{h}{(2mE_o)^{\frac{1}{2}}}$$

Resposta correta: B

6. Usando V = λ.f e considerando a velocidade das ondas igual, note que λ e f são inversamente proporcionais.
λ(verde) < λ(vermelha), pois f(verde) > f(vermelha)
Usando E = h . f e observando que E α f, vem:
$E_{(verde)} > E_{(vermelha)}$

Resposta correta: B

7. (F) Incorreta. O efeito fotoelétrico não depende da intensidade – (amplitude)
(F) Incorreta. A energia do fóton deve ser maior que a função trabalho.
(V)
(V)
(F) O efeito fotoelétrico depende da energia da onda (frequência).

8. O efeito fotoelétrico consiste na capacidade que possui a luz de arrancar elétrons de uma superfície metálica ao incidir sobre essa superfície. O fóton, no entanto, deve ter essa quantidade mínima de energia suficiente para provocar o fenômeno.

Resposta correta: C

9. Ocorrerá o efeito fotoelétrico se a energia do fóton for maior que a função trabalho. Portanto, o fator que determina a emissão de fotoelétrons é o material da placa.

Resposta correta: C

10. O efeito fotoelétrico consiste na capacidade que possui a luz de arrancar elétrons de uma superfície metálica ao incidir sobre essa superfície. O fóton, no entanto, deve ter essa quantidade mínima de energia suficiente para provocar o fenômeno.

Resposta correta: D

(PÁGINAS 77 A 79)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Para todos os átomos de todos os elementos, os níveis de energia são iguais.

Resposta correta: B

2. $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ em que $\boxed{E_1 = -13,6\,e\,V\ e}$

n = 1 (estado fundamental)

Para n = 2 "primeiro estado excitado":

$$E_2 \frac{-13,6\,eV}{2^2} \rightarrow \boxed{E_2 = -3,4\,eV}$$

A energia necessária para a transição é:

$$\Delta E = E_2 - E_1 \rightarrow \Delta E = -3,4 - (-13,6) \rightarrow \boxed{\Delta E = 10,2\ eV}$$

Resposta correta: C

3. De acordo com Thomson, o modelo atômico seria uma massa positiva e com algumas partículas positivas e algumas partículas negativas "pudim de passas", para Rutherford, o núcleo positivo e os elétrons girando ao redor do núcleo.

Resposta correta: D

4. Como o elétron vai de um orbital de maior (Ex) energia para um de menor (Ey) energia, então ele emite energia.

$$h\ .\ f = E_x - E_y \rightarrow \boxed{f = \frac{E_x - E_y}{h}}$$

Resposta correta: A

5. $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, em que $E_1 = -13,6\,e\,V$ e

n = 1 (estado fundamental)

Para n = 2 "primeiro estado excitado":

$$E_2 \frac{-13,6\,eV}{2^2} \rightarrow \boxed{E_2 = -3,4\,eV}$$

A energia necessária para a transição é:

$$\Delta E = E_2 - E_1 \rightarrow \Delta E = -3,4 - (-13,6) \rightarrow \boxed{\Delta E = 10,2\ eV}$$

A energia aumentou de –13,6 eV para –3,4eV, porque absorveu 10,2eV.

Resposta correta: E

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. A emissão de luz envolve o conceito de níveis de energia dos átomos.
Elétrons e íons passam a colidir com os átomos de mercúrio. Estas colisões excitam os átomos que passam para níveis de energia superiores. Quando os elétrons dos átomos de mercúrio retornam aos seus níveis originais de energia, eles emitem fótons de luz na faixa ultravioleta, porém, invisíveis ao olho humano. É necessário, portanto, converter esta energia em luz visível, por isso, usa-se o material fosforoso que reveste o tubo.
Os átomos de fósforo são excitados ao absorverem a radiação ultravioleta, um dos elétrons do fósforo pula para um nível mais alto de energia e o átomo se aquece. Quando o elétron volta para o seu nível normal de energia, libera energia na forma de um fóton, daí o fósforo emite luz branca, visível.

Resposta correta: D

2. I. (F) O efeito fotoelétrico ocorre quando a frequência da radiação incidente supera a frequência de corte para o material iluminado, não importando a intensidade dessa radiação.
II. (F) Qualquer múltiplo inteiro de $\frac{h}{2\pi}$ é momento angular orbital permitido.
III. (V) Trata-se da hipótese da dualidade (Louis de Broglie).
IV. (V) A natureza complementar do mundo quântico se refere a dualidade partícula-onda. O Princípio de Heisenberg se refere a incerteza da simultaneidade de determinação da localização e da velocidade de uma partícula-onda devido a interação entre o observador e o sistema. Assim, a natureza dual da matéria é confirmada pelo Princípio da Incerteza.

Resposta correta: E

3. As energias dos fótons são $|\Delta E| = \frac{h \cdot c}{\lambda}$, assim:

$$|\Delta E|_x = \frac{4,13 \cdot 10^{-15} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{1,03 \cdot 10^{-7}} \rightarrow |\Delta E|_x = 12,03 \text{ eV}$$

$$|\Delta E|_y = \frac{4,13 \cdot 10^{-15} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{4,85 \cdot 10^{-7}} \rightarrow |\Delta E|_y = 2,55 \text{ eV}$$

Analisando os dados da figura, constatamos que a transição associada ao fóton X é a 2 e ao fóton Y, a 6.

Resposta correta: A

4. O Princípio da Incerteza proposto por Heisenberg diz que é impossível determinar a posição e a velocidade de um elétron em torno do núcleo atômico.

Resposta correta: B

5. A luz vermelha monocromática é gerada pelo decaimento simultâneo de vários elétrons entre um mesmo par de níveis atômicos.

Resposta correta: A

6. Rutherford usou partículas alfa, de carga sabidamente positiva.

Resposta correta: A

7. A grande contribuição dessa experiência foi mostrar que a carga positiva e quase toda a massa do átomo estão concentradas em um núcleo muito pequeno.

Resposta correta: D

8. O modelo proposto por Bohr tinha característica discreta, ou seja, que o átomo de hidrogênio possuía níveis de energia distintos nas suas órbitas.

Resposta correta: B

9. I. (F) A intensidade da radiação não depende da diferença de energia entre dois estados energéticos de um átomo.
II. (V) A frequência da radiação é dada por: $f = \frac{\Delta E}{h}$
III. (V) Usando, $\lambda = \frac{V}{f}$ como o comprimento de onda é inversamente proporcional a frequência de radiação, também será a diferença de níveis de energia do átomo.

Resposta correta: D

10. $E_4 = \frac{-E_0}{4^2} = \frac{-E_0}{16}$

$$\Delta E = E_4 - E_0 = -\frac{E_0}{16} - (-E_0)$$

$$\Delta E = \frac{-E_0 + 16E_0}{16} \rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{15E_0}{16}}$$

Resposta correta: D

(PÁGINAS 81 A 83)

ATIVIDADES PARA SALA

1. $E_R = E_0 + K \rightarrow K = E_R - E_0 = 2,5 - 0,5 \rightarrow K = 2,0 \text{ MeV}$
Sabemos que:

$E_R = m \cdot C^2$, em que $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$, assim:

$$E_R = \frac{m_0 \cdot C^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{C^2} = \left(\frac{E_0}{E_R}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = \left[1 - \left(\frac{E_0}{E_R}\right)^2\right] \cdot C^2 \rightarrow v^2 = \left[1 - \left(\frac{0,5}{2}\right)^2\right] \cdot c^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v = 0,96C}$$

Resposta correta: D

2. $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} = \dfrac{12}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0{,}8.C}{C}\right)^2}} \rightarrow \boxed{\Delta t = 20\text{meses}}$

Resposta correta: B

3. Se E é a energia relativística $\rightarrow [E] = m \,.\, L^2 \,.\, T^{-2}$
Sendo C a velocidade da luz $\rightarrow [C] = L \,.\, T^{-1}$
Então: $E = x \,.\, C \rightarrow [E] = [x] \,.\, [C] \rightarrow ML^2T^{-2} = [x] \,.\, LT^{-1}$

$[x] = \dfrac{ML^2T^{-2}}{LT^{-1}} \rightarrow [x] = M \,.\, L \,.\, T^{-1}$

Da análise dimensional conclui-se que:
[x] = [Quantidade de movimento]

Resposta correta: E

4. I. (F) O tempo depende do referencial para velocidades altas.
II. (V)
III. (V)

Resposta correta: C

5. Sendo $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \,.\, C \rightarrow \dfrac{V}{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, logo:

$$k = M \,.\, C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

$$K = M.\, C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} - 1\right) = M \,.\, C^2 . \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} - 1\right)$$

$\boxed{K = M.C^2}$

Resposta correta: A

Atividades Propostas

1. $E = 2{,}0 \,.\, 10^6\text{kWh} = 2{,}0 \,.\, 10^6 \,.\, 3{,}6 \,.\, 10^6 \rightarrow E = 7{,}2 \,.\, 10^{12}\text{J}$
$E = m \,.\, C^2$
$7{,}2 \,.\, 10^{12} = m \,.\, (3 \,.\, 10^8)^2$
$m = \dfrac{7{,}2 \,.\, 10^{12}}{9 \,.\, 10^{16}} \rightarrow m = 0{,}8 \,.\, 10^{-4}\text{kg} \rightarrow \boxed{m = 0{,}08\text{g}}$

Resposta correta: A

2. I. (F) O som é uma onda mecânica, portanto, não se propaga no vácuo.
II. (V)
III. (V)

Resposta correta: D

3. Usando a conservação da energia:
$h \,.\, f_{min} + h \,.\, f_{min} = m_e \,.\, c^2 + m_e \,.\, c^2$

$2h \,.\, f_{min} = 2m_e \,.\, c^2 \rightarrow f_{min} = \boxed{\dfrac{m_e \cdot c^2}{h}}$

Resposta correta: B

4. O 2º postulado da Teoria da Relatividade afirma que a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor C em relação a qualquer referencial inercial.

Resposta correta: A

5. A energia total de uma partícula vale:
$E^2 = p^2 \,.\, c^2 + m_0^2 \,.\, c^4$
Como a massa de repouso de um fóton é nula, a expressão acima fica:
$E^2 = p^2 \,.\, c^2$
Portanto a quantidade de movimento linear de um fóton vale:

$P = \dfrac{E}{C}$ ①, em que $E = h \,.\, f$ ②

Substituindo ② em ①, vem:

$\boxed{P = \dfrac{h \,.\, f}{C}}$

Resposta correta: D

6. A velocidade da luz é constante e igual a c em qualquer referencial inercial, 2º postulado da relatividade de Einstein.

Resposta correta: B

7. A contração do comprimento só ocorre na direção do movimento. As dimensões perpendiculares à direção do movimento não são afetadas. Assim, o cubo será visto, como indica a alternativa a.

Resposta correta: A

8. I. (V) Se somarmos as massas das partículas resultantes da fissão nuclear, este resultado é menor, pois quando ocorre a fissão temos também uma grande quantidade de energia liberada. Como massa e energia são equivalentes parte da massa se transforma em energia. Daí o resultado da soma das massas após a reação ser menor.
II. (F) Como este processo libera energia, e esta energia provem da massa dos reagentes, conclui-se que a massa do dêuteron é um pouco menor que a soma das massas prótons e nêutron.
III. (V) O sol emite energia, que ocorre através da fusão nuclear, onde parte de sua massa é convertida em energia.

Resposta correta: E

9. (F) A comprovação experimental da teoria da relatividade é observada em aceleradores de partículas.
(V)
(V)
(V) Como a velocidade da luz é a mesma para qualquer referencial inercial, o intervalo de tempo medido em cada referencial será diferente, desde que estejam em movimento entre si.
(V)

Resposta correta: F, V, V, V, V

10. (V)
(F) Para dimensões e velocidades perceptíveis aos sentidos humanos, as equações da física moderna se convertem nas newtonianas.

(V)
(V)
(F) A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer referencial inercial.
(F) Massa, comprimento e tempo dependem da velocidade de acordo com a Física Moderna.

Resposta correta: V, F, V, V, F, F

(PÁGINAS 84 A 86)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Pelo Princípio de Conservação das cargas elétricas, concluímos que a carga elétrica do neutrino é nula.

   Resposta correta: E

2. No processo de aniquilação conservam-se a carga elétrica, a energia e o momento linear.

   Resposta correta: C

3. Esquematicamente:
   $2g \xrightarrow{1600\,anos} 1g \xrightarrow{1600\,anos} 0,5g \xrightarrow{1600\,anos} 0,25g$
   Portanto, o tempo necessário é igual a 3 . 1600

   $\boxed{\Delta t = 4800 \text{ anos}}$

   Resposta correta: B

4. O processo é chamado de fusão nuclear. Os núcleos leves de hidrogênio são fundidos em novos núcleos de hélio, liberando uma grande quantidade de energia.

   Resposta correta: B

5. Partícula alfa, sofre desvio para cima, partícula beta desvio para baixo e partícula gama não sofre desvio.

   Resposta correta: C

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Cada vez que se atravessa uma placa, a intensidade cai pela metade. Logo:
   $I_0 \rightarrow \frac{I_0}{2} \rightarrow \frac{I_0}{4} \rightarrow \frac{I_0}{8} = 0,125.I_0$

   Resposta correta: D

2. Esquematicamente:
   $100\,vezes \xrightarrow{6\,meses} 50\,vezes \xrightarrow{6\,meses} 25\,vezes \xrightarrow{6\,meses}$
   $\xrightarrow{6\,meses} 12,5\,vezes \xrightarrow{6\,meses} 6,25\,vezes \xrightarrow{6\,meses}$
   $\xrightarrow{6\,meses} 3,125\,vezes \xrightarrow{6\,meses} 1,5625\,vezes \xrightarrow{6\,meses}$
   $\xrightarrow{6\,meses} 0,78125$vezes do valor inicial, entrando na tolerância.

   Pelas opções, 4 anos, por segurança.

   Resposta correta: A

3. Analisando o gráfico, vemos que o único item correto é o III.

   Resposta correta: C

4. A reação nuclear correspondente é:
   ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\,.\,{}^{4}_{2}\alpha + y\,.\,{}^{0}_{-1}\beta$
   Nessa expressão, temos:
   $\left.\begin{array}{r} 238 = 206 + 4\,.\,x \\ 92 = 82 + 2x - y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{x = 8} \\ \boxed{y = 6} \end{array}$

   Resposta correta: D

5. No gráfico dado, observamos que a cada 30 anos, a porcentagem da massa em atividade se reduz a metade. Portanto a meia-vida corresponde a 30 anos. A partir de 2007 "20 anos" e após o tempo equivalente a uma meia-vida "30 anos", resultando em 50 anos no gráfico, restam aproximadamente 32%, em que 32% de 20 = 6,4g.

   Resposta correta: B

6. (F) A partícula alfa tem carga positiva +2e.
   (V)
   (F) Possui 4 unidades de massa atômica.
   (V)
   (F) A partícula alfa tem carga positiva +2e.

   Resposta correta: F, V, F, V, F

7. A reação nuclear correspondente é:
   ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}x$
   Note que o número de massa da partícula é 4 e o número atômico da partícula x é 2. Isto indica ser uma partícula α "alfa".
   A segunda reação nuclear, é:
   ${}^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}y$
   Note que o número de massa é 0 e o número atômico é –1. Isto indica uma partícula "beta" β.

   Resposta correta: E

8. Radiação alfa é um núcleo composto por dois prótons e dois nêutrons, *portanto, corresponde a um núcleo de hélio.*
   Radiação composta por elétrons é chamada beta.
   Radiação gama, são fótons com alta energia e possui o maior poder de penetração.

   Resposta correta: C

9. Para $t = 0 \rightarrow m_0$

   Para $t = 20h \rightarrow \frac{1}{2}m_0$

   Para $t = 40h \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_0\right) = \frac{1}{4}m_0$

   Portanto, a quantidade de átomos radioativos desintegrados é dada por:
   $m_0 - \frac{1}{4}m_0 = \frac{3}{4}m_0$

   Resposta correta: E

10. 5h e 30min = 330min
    Esquematicamente:
    100% da massa $\xrightarrow{110\,min}$ 50% $\xrightarrow{110\,min}$ 25% $\xrightarrow{110\,min}$ 12,50%

    Resposta correta: B

Módulo 1

Reações Orgânicas
(Páginas 89 e 90)

Atividades para Sala

1. A ligação que terá maior tendência a sofrer ruptura heterolítica será aquela que apresentar maior momento dipolo elétrico.

   Resposta correta: E

2. Como o carbono ficou com um par de elétrons, podemos concluir que houve uma cisão heterolítica.

   Resposta correta: B

3. O H^+ atua com o eletrófilo, ele atua como ácido de Lewis, atacando a parte rica em elétrons da molécula.

   Resposta correta: E

4. A quebra de ligações pode ocorrer de forma homolítica, gerando radicais (espécies altamente reativas). No caso, há uma divisão equitativa dos elétrons da ligação covalente. Entretanto, pode ocorrer uma ruptura desigual, produzindo cátions ou ânions.
   A homólise costuma ser causada por ação de luz ou calor. Enquanto que a heterólise, solventes polares ou catalisadores.
   O radical benzil é mais estável que o etenil por causa do efeito de conjugação com o anel benzênico.

   Resposta correta: C (Somente I, III e V)

5. $H_3C—CH_2—H + Cl—Cl \longrightarrow H_3C—CH_2—Cl + H—Cl$

   Note que houve uma cisão homolítica nos reagentes, formando radicais livres.

   Resposta correta: D

Atividades Propostas

1. A reação citada indica uma reação de homólise, pois a ligação é apolar.

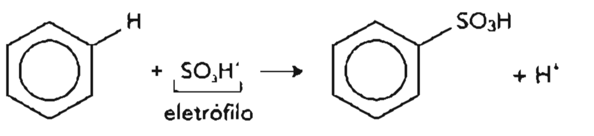
   Resposta correta: C

2. Os eletrófilos apresentam deficiência de elétrons. Portanto, de acordo com o conceito de Lewis, funcionam como ácidos.

   Resposta correta: B

3. Na reação II, temos: Nu é a base de Lewis, pois doa o par de elétrons; e na reação I, o eletrófilo "E" recebe o par de elétrons, logo, funciona como ácido.

   Resposta correta: E

4. 

   Trata-se de um eletrófilo forte. Logo, temos uma reação eletrofílica.

   Resposta correta: B

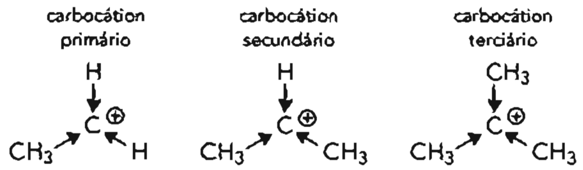
5. As reações de adição constituem situações em que ocorre redução no número de espécies presentes no meio reacional. Em I e II, tal fato ocorre. Entretanto, em II há uma junção de duas moléculas iguais, um tipo de polimerização denominada dimerização.

   Resposta correta: C

(Páginas 91 e 92)

Atividades para Sala

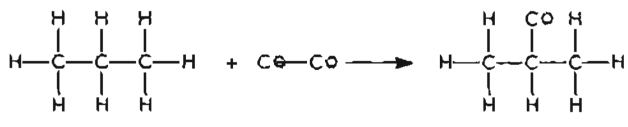
1. Analisando a estabilidade de um carbocátion através do efeito indutivo doador de elétrons, temos:



   Pelo efeito indutivo doador de elétrons dos metis do carbocátion terciário o deixa mais estável. Logo, temos a seguinte sequência:

   $$\boxed{C_{TERCIÁRIO} > C_{SECUNDÁRIO} > C_{PRIMÁRIO}}$$

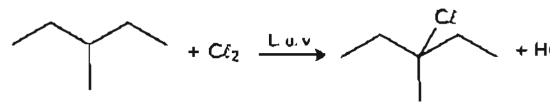
   Resposta correta: D

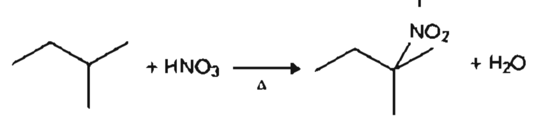
2. 

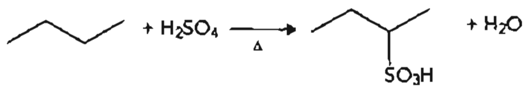
   2-cloropropano ou cloreto de isopropila

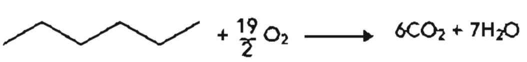
   O cloreto de isopropila é mais estável em virtude do radical isopropil ser estabilizado por hiperconjugação.

   Resposta correta: B

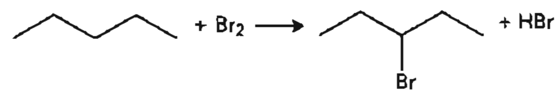
3. a) 

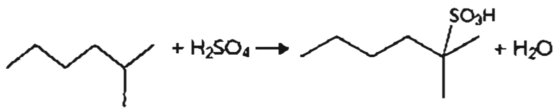
   b) 

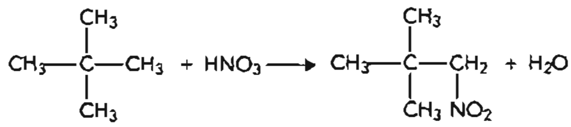
   c) 

   d) 

4. a) 2-clorobutano.
   b) 2-metil-2-nitropentano.
   c) ácido 3-metil-3-heptanossulfônico.

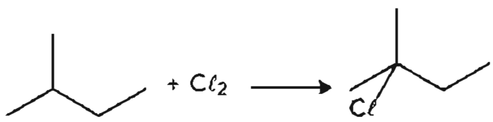
5. a) 

   b) 

   c) 

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.



2-metilbutano — 2-cloro-2-metilbutano

Obs.: Como o carbocátion mais estável é o carbocátion terciário, preferencialmente o Cℓ entrará substituindo o hidrogênio terciário, embora na reação não haja a formação efetiva do carbocátion.

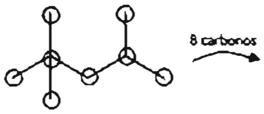
Resposta correta: D

2. O ciclobutano é menos estável do que os ciclanos de cinco ou seis carbonos porque seu ângulo interno de 90° está mais afastado do estável valor de 109° 27'30''. O tolueno é estável, produz reação de substituição e o dicloroetano de eliminação.

Resposta correta: B

3. Pela análise da tabela, percebe-se um incremento energético de cerca de 600kg. De 3886 para 2658, há uma diferença de algo próximo de 1200kg, ou seja, duas vezes 600kg. Assim, houve um aumento de dois carbonos.

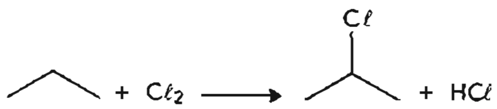
Resposta correta: B

4. 

$\xrightarrow{\text{8 carbonos}}$ $C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$

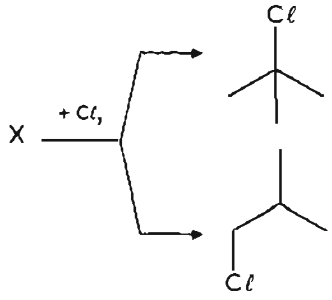
2,2,4-trimetil-pentano — 8 mol de CO_2

Resposta correta: D

5. 

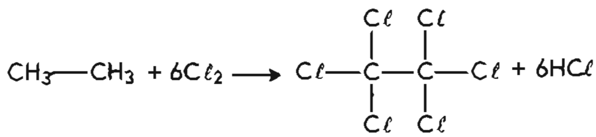
A cloração do propano trata-se de uma reação de substituição com formação de radicais livres. (2•Cℓ).

Resposta correta: D

6. 

Logo, o composto X é o metilpropano: 

Resposta correta: E

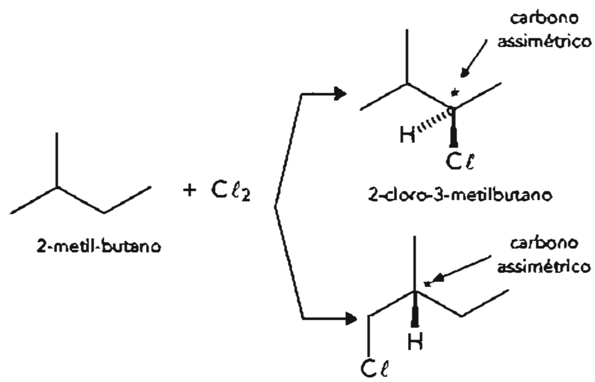
7. 

hexacloroetano

Obs.: Para cada hidrogênio a ser substituído, usamos 1 mol de $C\ell_2$.

Resposta correta: E

8.



Resposta correta: B

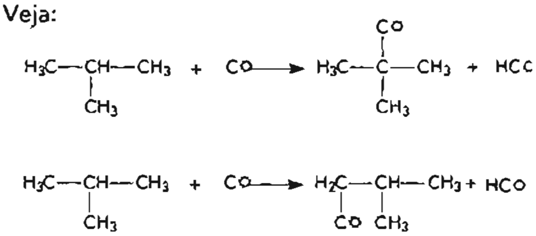
9. $CH_4 + C\ell_2 \xrightarrow{\text{ETAPA 1}} CH_4 + 2C\ell\bullet \longrightarrow CH_3 - C\ell + HC\ell$

homólise

Trata-se de uma reação de substituição radicalar.

Resposta correta: B

10. Veja:



Resposta correta: B

11. Veja:

$CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(\ell)}$
$H_3C - CH_{3(g)} + \frac{7}{2}O_{2(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 3H_2O_{(\ell)}$
$CH_3 - OH + 2O_2 \rightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(\ell)}$
$H_3C - CH_2 - OH + 3O_{2(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 3H_2O_{(\ell)}$

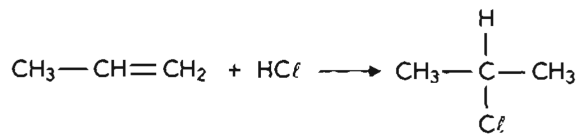
Portanto, $V_2 > V_4 > V_1 > V_3$

Resposta correta: A

(PÁGINAS 94 E 95)

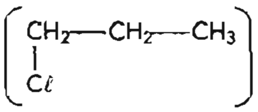
ATIVIDADES PARA SALA

1. Veja a reação.



(produto principal)

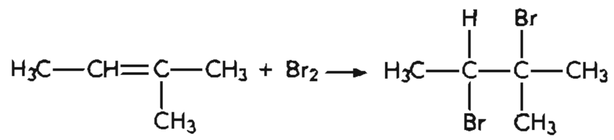
Nota: o outro possível produto,



quase não é formado. Vide regra de Markovnikov.

Resposta correta: A

2. Veja.

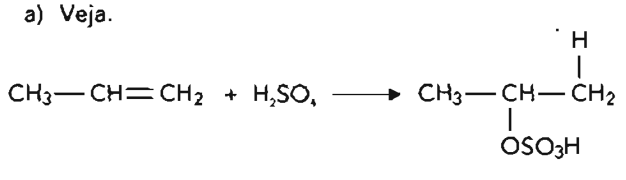


(I) (II)

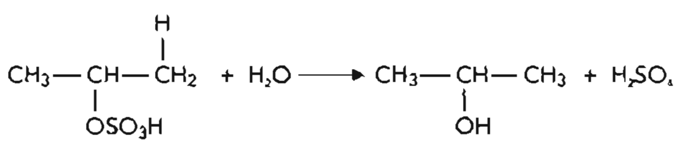
2-metil-buteno-2

Resposta correta: C

3. a) Veja.

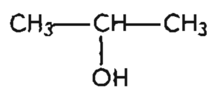


(1ª etapa)



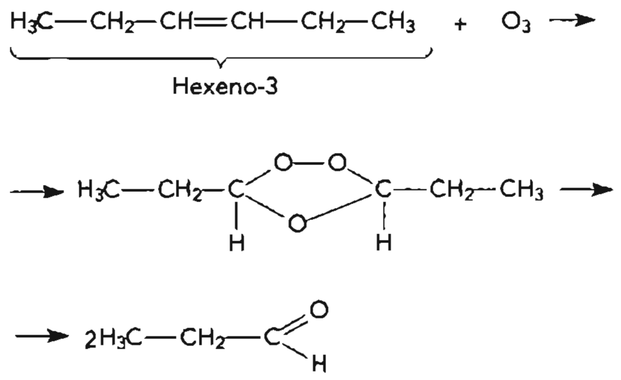
(2ª etapa)

b) Utilizando-se o propeno, obtemos o **2-propanol**, cuja fórmula estrutural é:



4. Na reação, observa-se um aumento na quantidade de átomos presentes do início até o fim. Assim, há uma reação de **adição**. Todavia, um aumento na quantidade de hidrogênios na molécula caracteriza-se como **redução**. Na hidrogenação, pode-se utilizar a platina como catalisada.

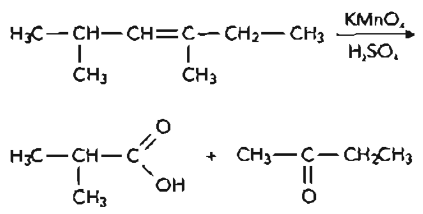
Resposta correta: B

5. 

Resposta correta: C

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Veja a reação.



(I) (II)

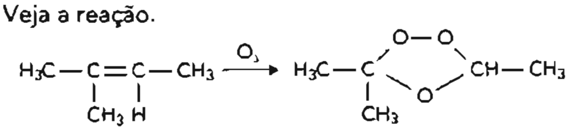
(I) Ácido metilpropanoico.
(II) Butanona.
Portanto, o alceno **X** é o 2,4-dimetil-3-hexeno.
Nota: na oxidação enérgica, os hidrogênios ligados a carbonos oxigenados também são oxidados.

Resposta correta: C

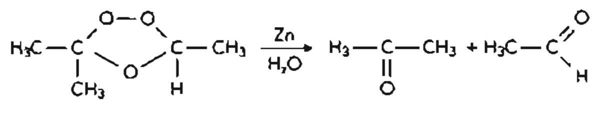
2. A ozonólise de carbonos primários e secundários origina aldeídos, e a de carbonos terciários produz cetonas.

Resposta correta: B

3. Veja a reação.



(ozonídeo primário)

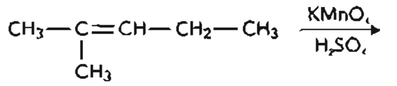


(propanona) (etanal)

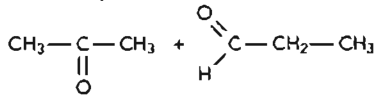
Portanto, o alceno original é o metil-2-buteno.

Resposta correta: C

4. Veja a reação.



(2-metil-2-penteno)

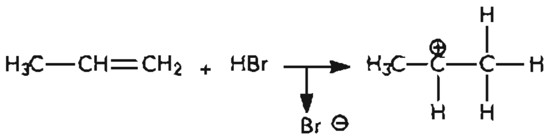


(propanona) (ácido propanoico)

Nota: lembre-se que a oxidação enérgica de carbonos primários e secundários origina aldeídos, e a de carbonos terciários origina cetonas.

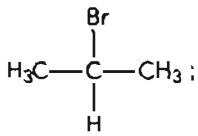
Resposta correta: B

5. No mecanismo reacional, a ligação π ataca o átomo de hidrogênio, produzindo um carbocátion. Esta etapa é lenta.



(A)

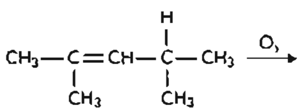
Considerando o efeito hiperconjugativo, o carbocátion secundário apresenta maior estabilidade. Desse modo, seguindo a regra de Markovnikov, o brometo entra no carbono secundário.

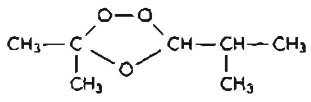


; 2-bromopropano **(B)**

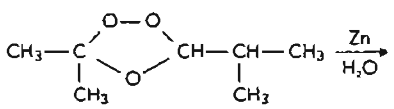
Resposta correta: D

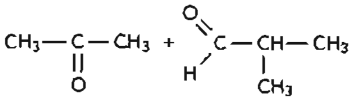
6. Veja.





(ozonídeo primário)

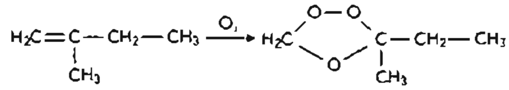


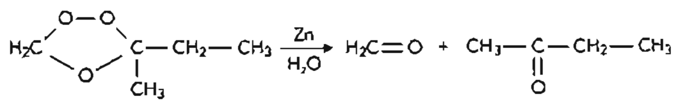


(propanona) (2-metil-propanal)

Resposta correta: E

7. Veja a reação.



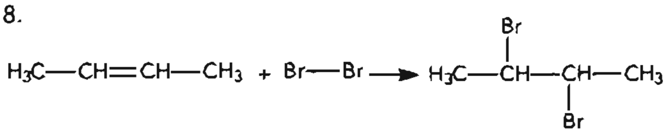


(metanal) (metil-etil-cetona)

O alceno original é o 2-metil-1-buteno.

Resposta correta: D

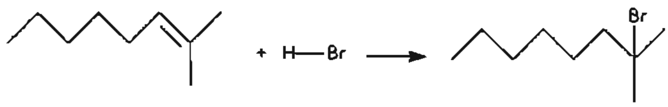
8.



Trata-se de uma reação de adição à dupla, sendo produzido o 2,3-dibromobutano.

Resposta correta: B

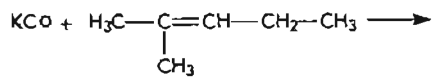
9.

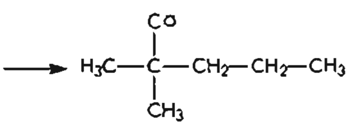


O carbono de número **3** é mais hidrogenado do que o de número **2**. Por isso, segundo a regra citada, recebe o hidrogênio. O carbono **2** recebe o bromo.

Resposta correta: D

10.





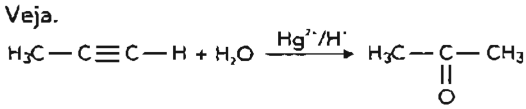
(2-cloro-2-metil-pentano)

Resposta correta: A

(PÁGINAS 96 A 98)

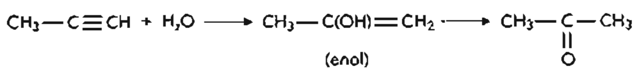
ATIVIDADES PARA SALA

1. Veja.



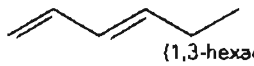
acetona

Nota: o intermediário formado (enol) é instável.



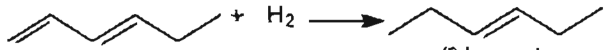
Resposta correta: B

2. O alcadieno que atende às condições I e II é representado por:



(1,3-hexadieno)

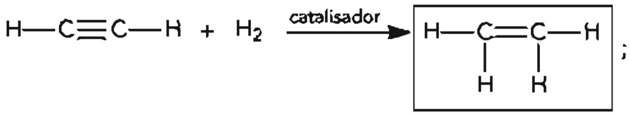
Veja sua hidrogenação parcial.



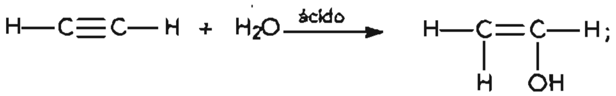
(3-hexeno)

Resposta correta: B

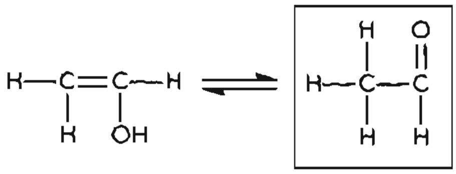
3.



adição parcial (1 mol) de hidrogênio à tripla se transforma em dupla.

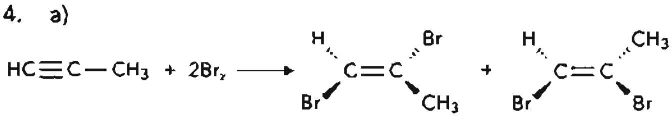


o enol obtido tautomeriza-se produzindo etanal.



Resposta correta: D

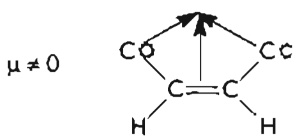
4. a)



(trans/E) (cis/Z)

b)

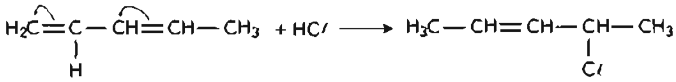
5. (F) O produto polar é o cis-dicloroeteno.



(V)
(V)
(F) É uma reação de redução.
(F) São isômeros geométricos.

ATIVIDADES PROPOSTAS

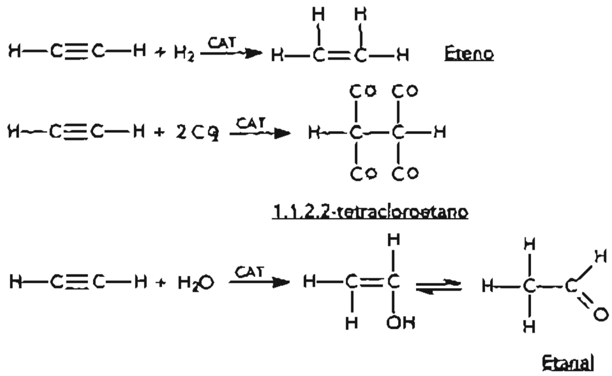
1. Veja a reação.



Nota: lembre-se da reatividade dos halogenidretos.
HI > HBr > HCℓ > HF

Resposta correta: A

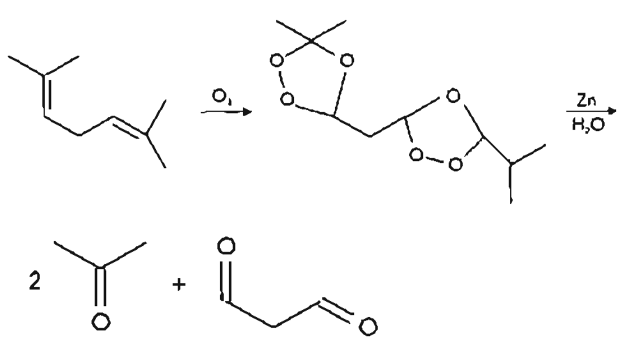
2. No caso de adições a tripla, nesta questão, o produto está diretamente ligado ao número de mols de reagente que foi adicionado.



Resposta correta: C

3. Veja.

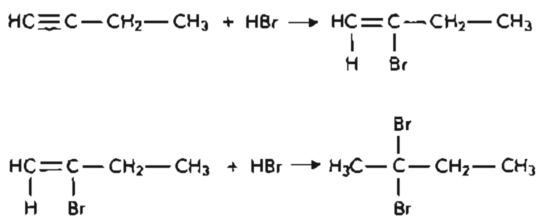
(ozonídeo primário)



Portanto, temos a formação de dois produtos diferentes.

Resposta correta: B

4. Veja.

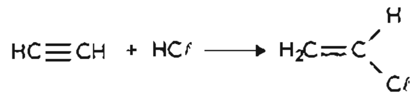


2,2-dibromo-butano

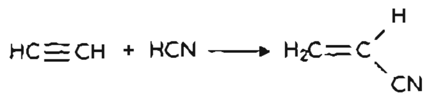
Resposta correta: D

5. Veja.

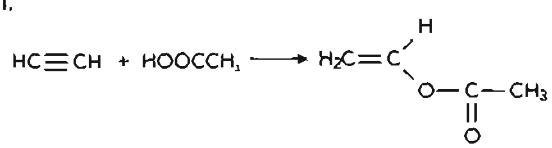
I.



II.



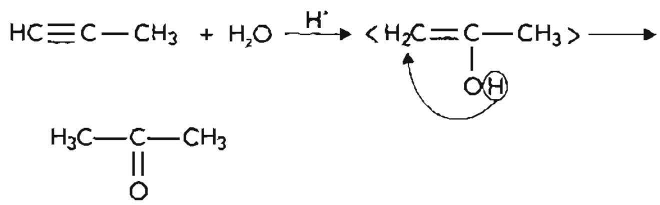
III.



Os produtos são obtidos a partir do **etino**.

Resposta correta: C

6. Veja.

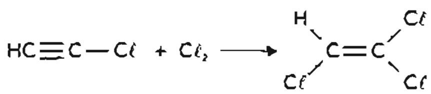


(propanona)

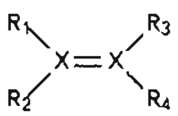
Nota 1: o enol (instável), por tautomeria, origina a cetona.

Resposta correta: E

7. Devemos utilizar um alcino que, após a cloração, não apresente isomeria geométrica. Veja a cloração do cloro acetileno.



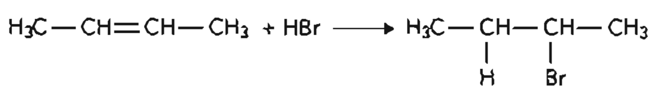
Nota: para apresentar isomeria geométrica, devemos ter:



, com $R_1 \neq R_2$ e $R_3 \neq R_4$

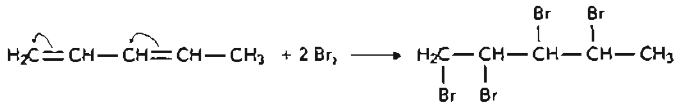
Resposta correta: D

8. De fato, os compostos I e III podem reagir com HBr para originar, no mínimo, um monobrometo. No entanto, o composto II, ao reagir com HBr, origina um **único** monobrometo devido a sua simetria. Veja.



Resposta correta: A

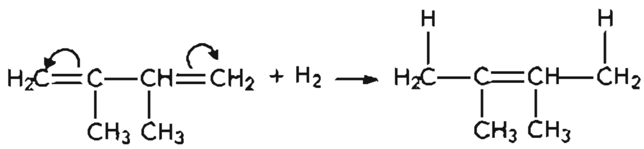
9. Veja a reação.



O produto formado é o 1,2,3,4-tetrabromopentano.

Resposta correta: E

10. Veja a reação.



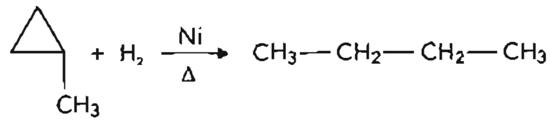
Essa hidrogenação origina o 2,3-dimetil-2-buteno.

Resposta correta: B

(PÁGINA 99)

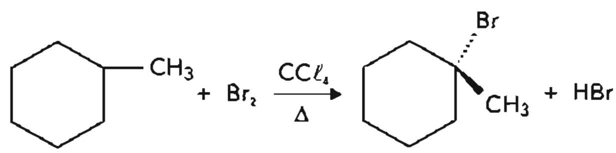
ATIVIDADES PARA SALA

1.

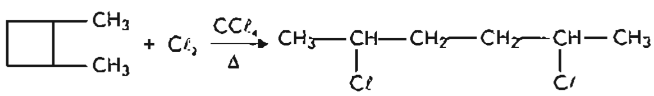


Nota: a elevada tensão angular do anel promove o "rompimento" do anel.

2.

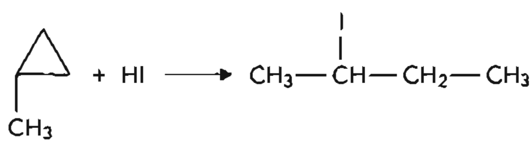


3.



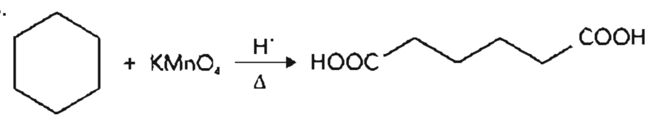
Nota 1: anéis com quatro carbonos possuem uma elevada tensão angular (Bayer).
Nota 2: alta tensão angular implica grande reatividade.

4.



Nota: essa adição de halogenidretos apenas ocorre devido à alta reatividade do ciclopropano.

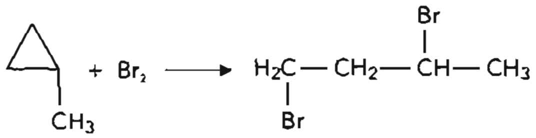
5.



Nota: $KMnO_4$, em presença de $H_2SO_{4(conc)}$, origina o oxigênio nascente [O], que favorece a oxidação enérgica.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Veja a reação.



Para obtermos o 1,3-dibromobutano devemos utilizar o metilciclopropano.

Nota 1: a partir do ciclopentano ocorrem reações de substituição (anéis mais estáveis).

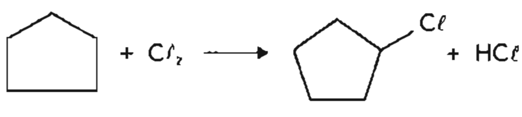
Nota 2: ao reagirmos o ciclopropano ou ciclobutano com Br_2 ou $C\ell_2$, na presença de luz (cisão homolítica), teremos reações de substituição e não de adição.

Resposta correta: C

2. Uma das substâncias é um alceno, pois sofre hidrogenação ($IDH_{C_6H_{12}} = 1$). A outra substância não possui insaturação, sendo, portanto, o ciclohexano.

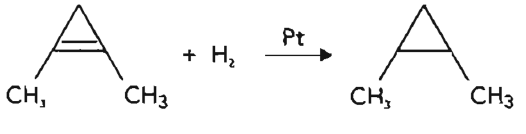
Nota: o ciclohexano é pouco reativo devido a sua grande estabilidade.

3. Veja.

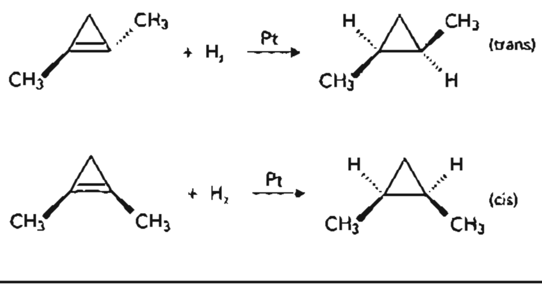


reação de substituição

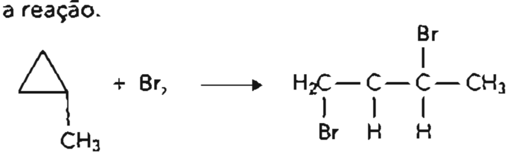
4. Veja.



Nota: se levarmos em consideração o aspecto estereoquímico, teremos:



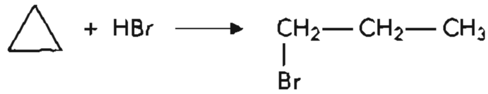
5. Veja a reação.



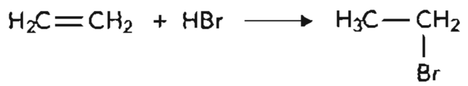
(1,3-dibromobutano)

Resposta correta: A

6. Veja.



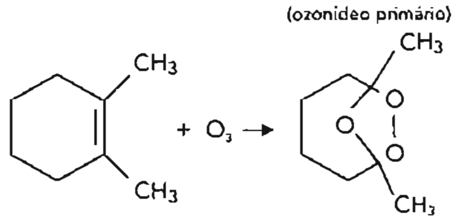
(1-bromopropano)

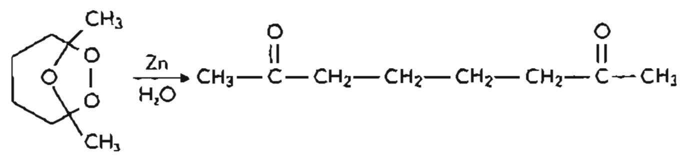


(bromoetano)

Resposta correta: E

7. Veja.

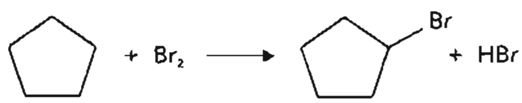




8. a) Os anéis com **cinco** e **seis** membros possuem "grande" estabilidade, realizando reações de substituição. Os anéis com **três** e **quatro** membros são instáveis devido a sua alta tensão angular (Bayer), sendo mais favoráveis a reações de adição.

   b) (I) 1,3-dibromopropano
   (II) Bromociclobutano e 1,4-dibromobuteno
   (III) Bromociclopentano

9. Veja.



Nota: anéis com **cinco** membros são mais favoráveis a reações de substituição devido a sua estabilidade.

Resposta correta: B

10. A alternativa correta está representada em A, pois:

$$2H_2C{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 + 2H_2 \longrightarrow H_3C{-}(CH_2)_3{-}CH_3$$

A proporção dos reagentes é 1 : 1, como foram consumidos n = 2 mols de H_2, existiam n = 2 mols do hidrocarboneto (MM = 70g/mol).

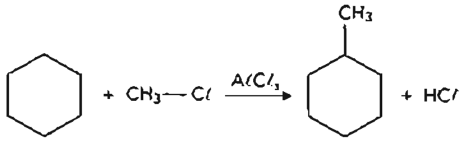
$n = \dfrac{m}{MM} \Rightarrow m = 70 \,.\, 2 = 140g$

Resposta correta: A

(Páginas 100 a 102)

Atividades para Sala

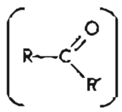
1. Veja.



Alquilação de Friedel-Crafts

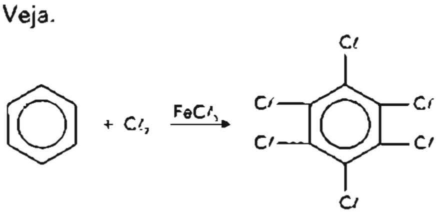
Resposta correta: C

2. Existem dois tipos de reações Friedel-Crafts:
   I. **Alquilação**: substituição de um hidrogênio do anel aromático por um grupo alquila.
   II. **Acilação:** substituição de um hidrogênio do grupo aromático por um grupo acila.



Resposta correta: D

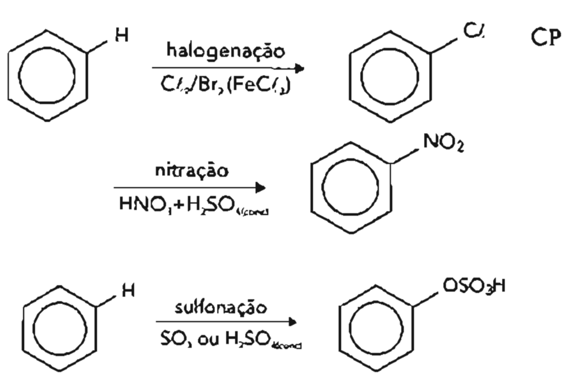
3. Veja.

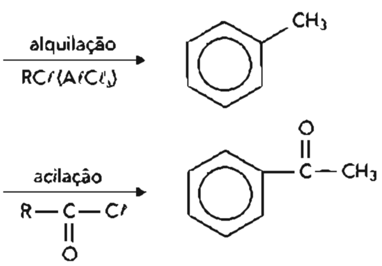


Nota: o ácido de Lewis $FeC\ell_3$ é o responsável pela formação do nucleófilo, $FeC\ell_3 + C\ell^- \longrightarrow FeC\ell_4^-$

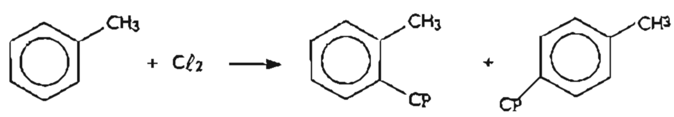
Resposta correta: E

4.





5.

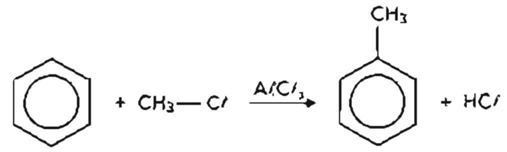


o-clorotolueno p-clorotolueno

Resposta correta: C

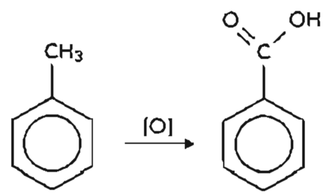
Atividades Propostas

1. A alternativa correta está representada em A, pois descreve uma alquilação de Friedel-Crafts.



Resposta correta: A

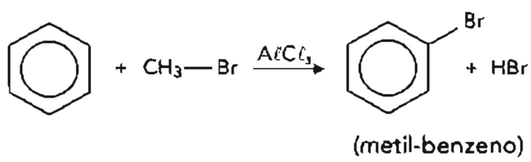
2.



A oxidação do tolueno ocorre no carbono do radical metila.

Resposta correta: C

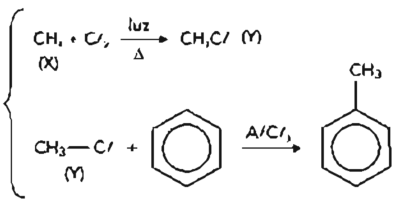
3. Veja.



(metil-benzeno)

Resposta correta: B

4. Observe a sequência reacional:



X : Metano.

Y : Cloreto de metila.

Nota: os alcanos, devido a sua baixa reatividade, reagem com halogênios apenas em presença de luz e alta temperatura (cisão homolítica).

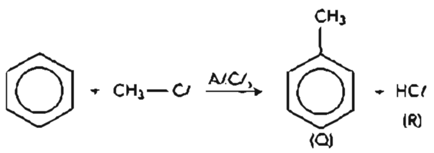
Resposta correta: A

5. Orientadores orto-para apresentam acentuado efeito mesomérico positivo, que é o responsável de forma mais direta pelo aumento na densidade eletrônica do anel. Das opções, apenas os grupamentos I, II e IV são orientadores orto-para.

$$-\ddot{N}H_2 > -\ddot{O}H > -CH_3$$

Resposta correta: D

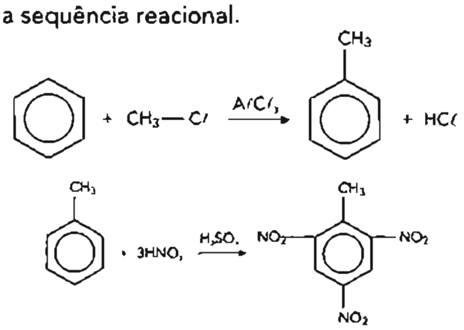
6. Veja a reação.



Q: Metilbenzeno (Tolueno).
R: Cloreto de hidrogênio.

Resposta correta: A

7. Veja a sequência reacional.

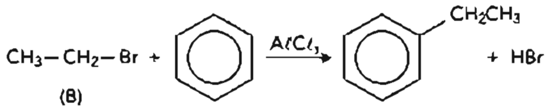


(substituição)

Resposta correta: D

8. Veja a sequência reacional.

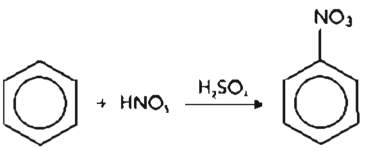
$$\underset{(A)}{CH_3-CH_3} + Br_2 \xrightarrow[\Delta]{luz} \underset{(B)}{CH_3-CH_2-Br} + HBr$$



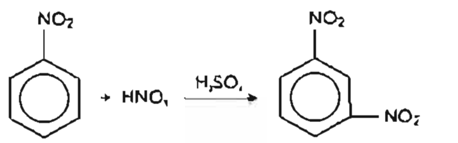
A: Etano
B: Bromoetano

Resposta correta: B

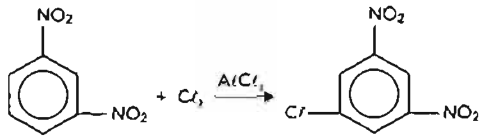
9. (I)



(II)



(III)



Nota: o grupamento -NO_2 é metadirigente.

Resposta correta: E

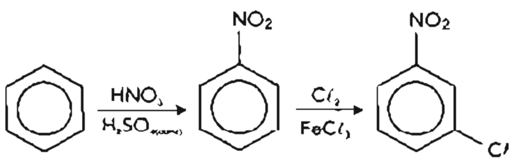
10. Dois núcleos condensados de benzeno formam o naftaleno. O benzeno reage com o cloro em condições apropriadas na presença do catalisador ($FeCl_3$). O anel benzênico possui ressonância de elétrons π que o torna bastante estável, diminuindo sua capacidade de reação em condições normais.

Resposta correta: D

(PÁGINAS 103 A 105)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Veja a sequência reacional abaixo.

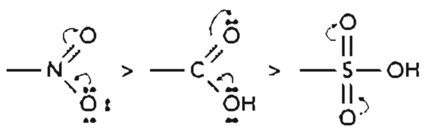


Nota: halogênios são orto-para-dirigentes fracos.

Resposta correta: C

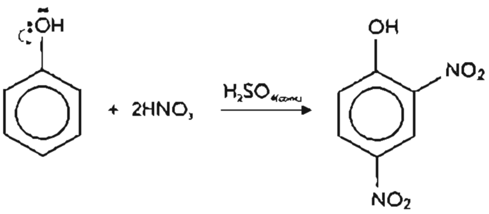
2. Grupos meta-dirigentes são desativadores do anel aromático, ou seja, diminuem a densidade eletrônica, dificultando o ataque eletrofílico. Esses grupamentos "retiram" elétrons do anel por efeito mesomérico e também indutivo. Analisando as opções, temos como alternativa correta D.

Nota:



Resposta correta: D

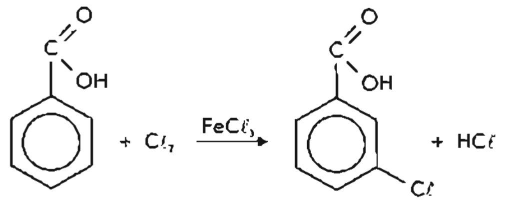
3. O grupo hidroxila do fenol é orto-para-dirigente. Assim:

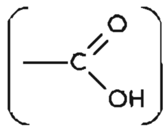


Nota: o grupo hidroxila apresenta efeito indutivo e mesomérico positivos, aumentando a densidade eletrônica no anel e facilitando o ataque eletrofílico.

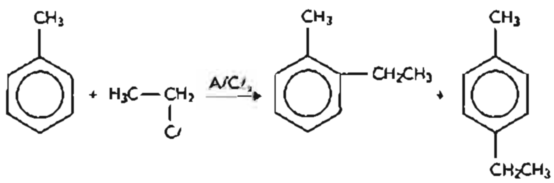
Resposta correta: E

4. a)



Nota: o grupamento  é meta-dirigente.

b)



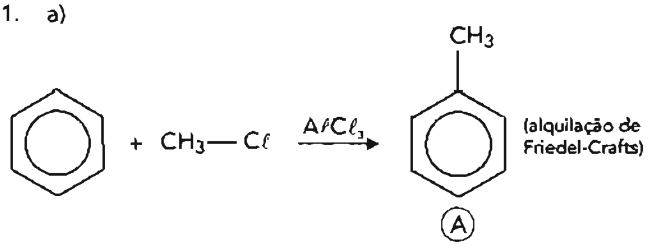
Nota: o metil ($-CH_3$) é um ativante fraco.

5. O mel benzênico costuma sofrer reação de substituição eletrofílica e não de adição.
Os carbonos, com exceção de alguns do anel benzênico que são secundários e hibridizam sp^2, não são secundários.
Os dois compostos são fenóis. Não são alcoóis.
O grupo substituinte é o t-butila e não o sec-butila.
A substituição dos fenóis ocorrem em **orto** e **para**.

Resposta correta: E

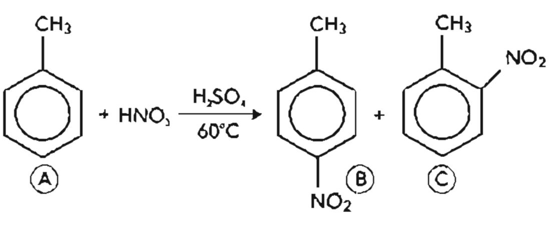
ATIVIDADES PROPOSTAS

1. a)



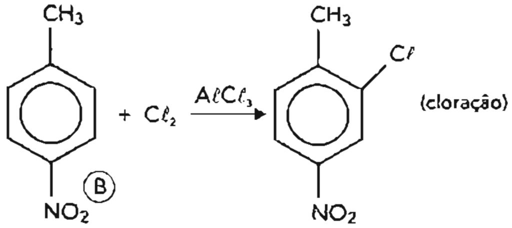
(Alquilação de Fridel-Crafts)

b)



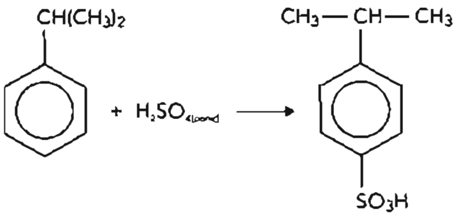
Nitração com formação do nitrotolueno, sendo o P-nitrotolueno o mais estável.

c)



Nota: o grupamento metil é orto-para dirigente e o grupamento nitro ($-NO_2$) é meta-dirigente.

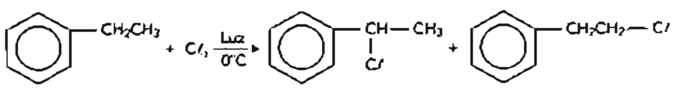
2. Veja.



Nota: pode ocorrer a formação do o-isopropil-benzeno sulfônico, no entanto, devido ao grande impedimento estérico, este quase não é formado.

Resposta correta: D

3. Temos uma cloração, no entanto, como esta acontece a baixas temperaturas (0°C), a reação ocorre fora do anel aromático. Veja.

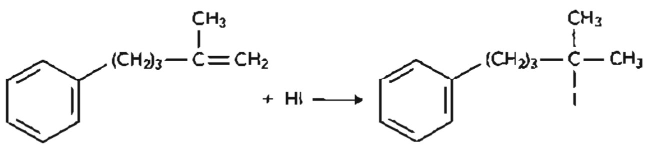


Resposta correta: B

4. A reatividade frente a uma substituição eletrofílica será maior naqueles anéis que possuírem maior densidade negativa de carga, ou seja, aqueles com grupamentos ativadores. Em (II) temos um ativante fraco ($-C\ell$), em (III) temos um ativante forte ($-\ddot{O}-CH_3$) e em (I) não existe substituinte. Portanto, a ordem crescente de reatividade é II < I < III.

Resposta correta: E

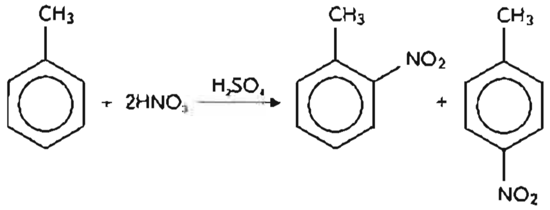
5. Veja.



A adição ocorre fora do anel aromático (que possui grande estabilidade e dificulta reações por adição) seguindo a regra de Markovnikov.

Resposta correta: C

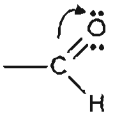
6. Veja a reação de nitração do tolueno.



O p-nitro-tolueno é mais estável que o o-nitro-tolueno, sendo este último, portanto, o produto secundário.

Resposta correta: E

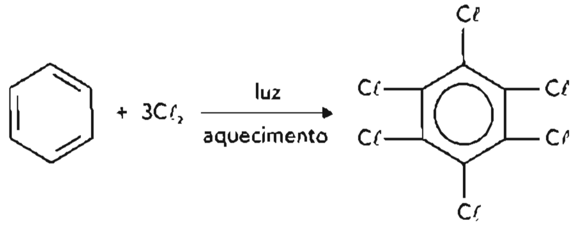
7. Os grupamentos $—\ddot{O}H$ e $—\ddot{O}—CH_3$ são ativantes (orientam as posições orto e para), enquanto que o grupamento,



é desativante (orientando a posição meta).

Resposta correta: B

8.



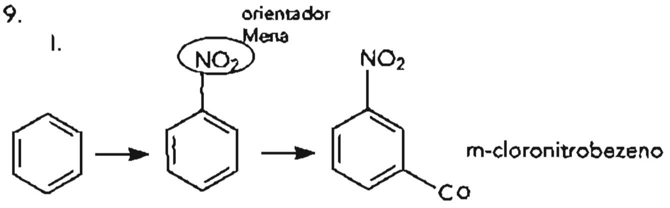
Apesar da alta estabilidade do anel aromático, o meio reacional bastante enérgico (luz/calor) promove a reação por adição.

Nota: lembre que em um meio reacional mais ameno teríamos uma reação de substituição.

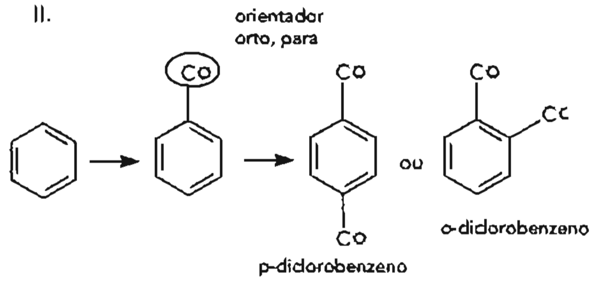
Resposta correta: E

9.

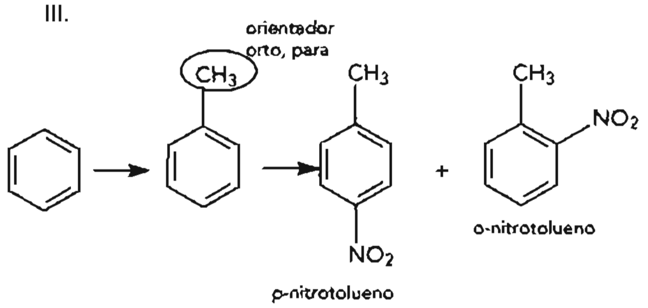
I.



II.

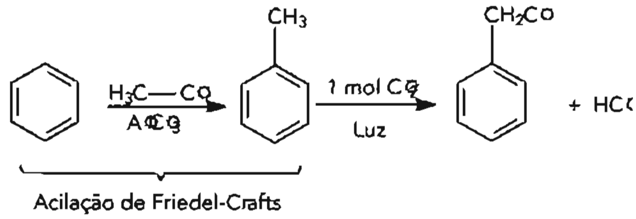


III.



Resposta correta: B

10.



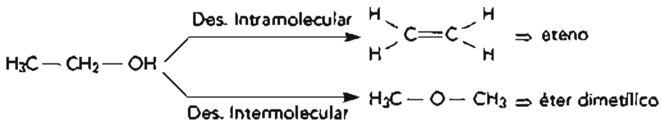
A reação de substituição ocorre na parte alifática por causa da presença de luz. E não no anel benzênico, pois não há condições para tal, como a presença de catalisador ideal. Lembrando que a substituição é radicalar.

Resposta correta: D

(PÁGINAS 106 E 107)

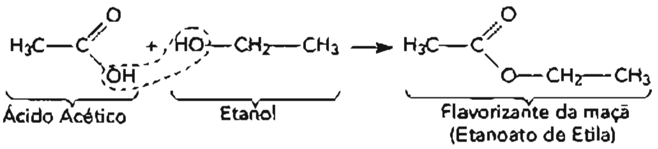
ATIVIDADES PARA SALA

1.



Resposta correta: B

2. Um éster é obtido por meio de uma reação entre um ácido carboxílico e um álcool. No caso do éster citado na questão podemos obtê-lo da seguinte maneira:



Resposta correta: B

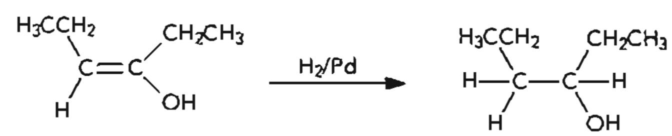
3. $\underbrace{C_nH_{2n+2}O}_{\text{Álcool de cadeia aberta e saturada}} + \frac{3n}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)H_2O$

Para um n = 1, temos:

$CH_4O + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$

Resposta correta: D

4.



Considerando que não foi indicada a posição da hidroxila, supõe-se que seja no carbono **3**. Assim, a dupla e a hidroxila ocupariam o mesmo local.
Se deve haver a formação de álcool saturado, a dupla do mol deve ser hidrogenada para transformar-se em ligação simples.

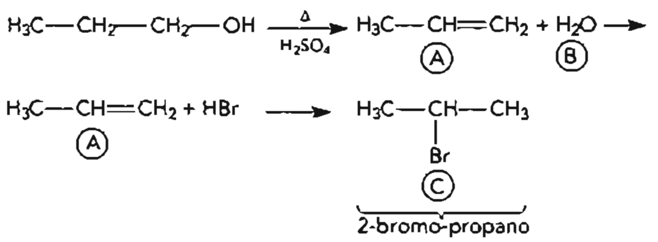
Resposta correta: C

5. Um álcool terciário sofreu uma reação de **eliminação** com a presença de um **ácido** que, através do próton H^+ junta-se ao OH produzindo água e um alceno (**2-metilpropeno**).

Resposta correta: E

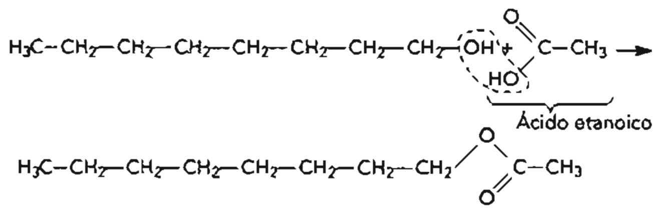
ATIVIDADES PROPOSTAS

1.



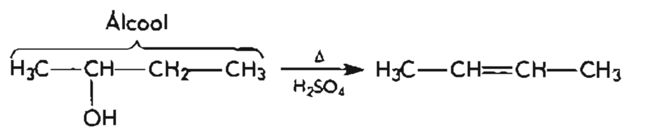
Resposta correta: C

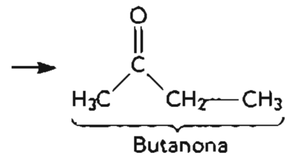
2. Para se obter um éster, é preciso fazer uma reação entre um ácido e um álcool.



Resposta correta: A

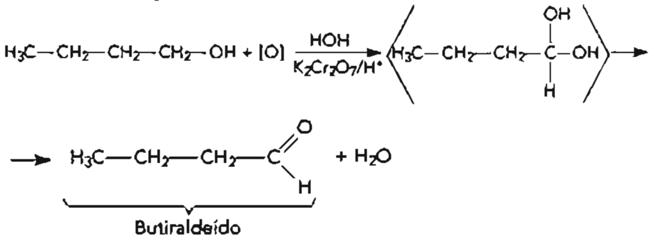
3.



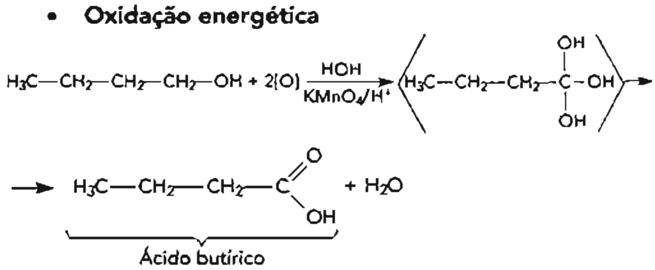


Resposta correta: D

4. • **Oxidação branda**

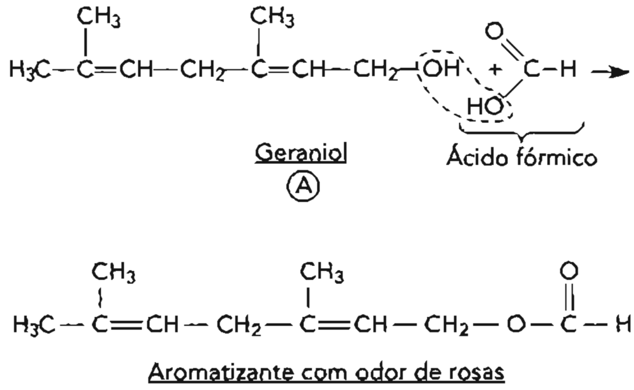


• **Oxidação energética**



Resposta correta: D

5.

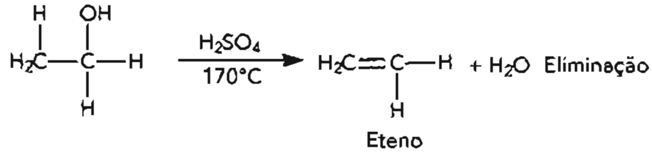


Resposta correta: C

6. Para se obter um aldeído a partir da oxidação de um álcool, este álcool deve ser primário (x). Já para se obter cetona deve-se oxidar um álcool secundário (y).

Resposta correta: B

7. A desidratação intramolecular ocorre dentro de uma só molécula. O que acaba por produzir o eteno.



Na intermolecular, dois álcoois formam um éter.

$$2\ H_3C-CH_2OH \xrightarrow[140°C]{H_2SO_4} \underset{\text{Etoxietano}}{H_3C-CH_2-O-CH_2CH_3} + H_2O$$

Resposta correta: B

8. O metanol é um álcool primário sofre reações de oxidação produzindo aldeído.

Resposta correta: D

9. Do ácido cítrico para o intermediário ácido 2-aconítico, ocorre uma desidratação.

Resposta correta: B

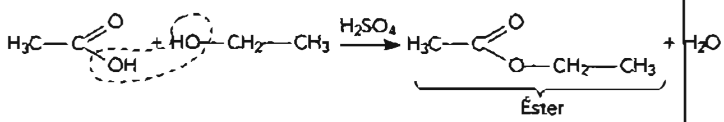
10. O álcool etílico sofre desidrogenação liberando H_3CCOH (o aldeído acético ou **etanal**) através de uma reação de oxidação (há perda de **hidrogênio**).

Resposta correta: C

(PÁGINAS 108 A 110)

ATIVIDADES PARA SALA

1.



Os ésteres (x) são produzidos através da reação, entre um ácido e um álcool (reação de esterificação).

Resposta correta: D

2. (F) O frasco **A** contém etanol.
(F) O frasco **C** contém acetaldeído.
(V)
(V)
(F) A substância do frasco **A**, quando reduzida, produz um alcano.

Resposta correta: F, F, V, V, F

3.

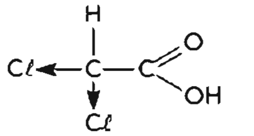
$$H_3C-CH_2-CH_2-CH_2-COOH \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_3C-CH_2-CH_2-CH_3$$

Resposta correta: E

4. A ordem é: etanoico > etanol > água.

Resposta correta: B

5.



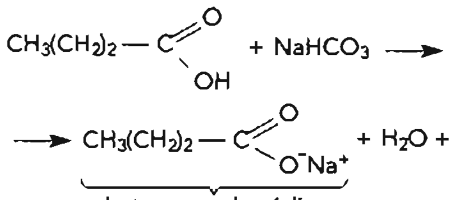
Dicloroacético

Os grupos de maior eletronegatividade desloca a nuvem eletrônica para eles, isso é o efeito indutivo negativo, fazendo a força ácida aumentar.

Resposta correta: D

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.



butanoato de sódio

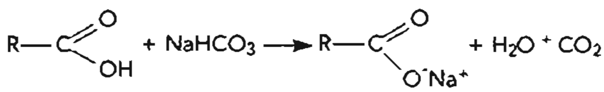
Resposta correta: D

2.

a)

b) Gás carbônico (CO_2)

3. Sendo ácida a substância injetada na pele quando submetida a uma ferroada de abelha, tem-se:



O sal formado ameniza a sensação de ardência.

Resposta correta: B

4. A estrutura (II) é igual a (I), o que não deveria ocorrer. No entanto, a partir do ácido salicílico (I), deve-se realizar uma salificação seguida de uma esterificação.

Resposta correta: C

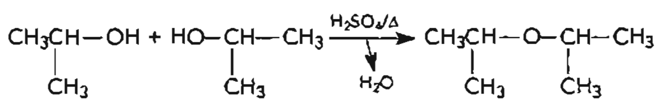
5. A reação **x** é a de hidrogenação, pois o H_2 está envolvido no processo. O composto I é um **ácido** hidrogenado na trans com relação às carboxilas.
A reação **y** é de esterificação, pois há a presença de um álcool reagindo com um ácido carboxílico. II é um **éster.**
A reação **z** é de **saponificação** pois há a presença de um éster reagindo com a base NaOH, produzindo o **sal orgânico III**.

Resposta correta: E

6. Veja as reações:

$$CH_3CH_2-OH + HO-CH_2CH_3 \xrightarrow[H_2O]{H_2SO_4/\Delta} CH_3CH_2-O-CH_2CH_3$$

(Éter etílico)



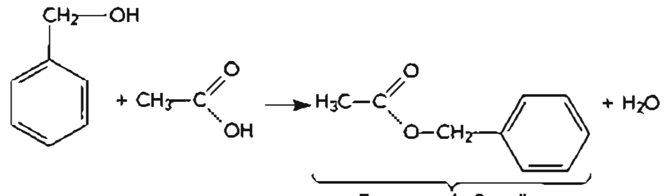
(Éter diisopropílico)

$$CH_3CH_2{-}OH + HO{-}\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{C}HCH_3 \xrightarrow[\downarrow H_2O]{H_2SO_4/\Delta} CH_3CH_2{-}O{-}\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{CH}{-}CH_3$$

(Éter etilisopropílico)

Resposta correta: A

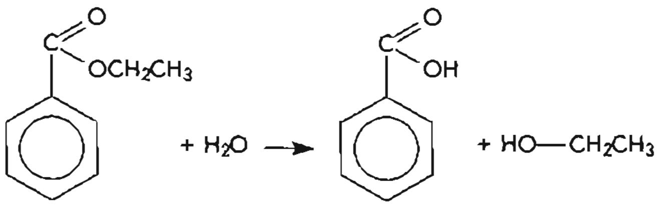
7. Veja:



Etanoato de Benzila

Resposta correta: A

8.



(Ácido) (Álcool)

Resposta correta: C

9. Nos itens citados na questão, encontramos as fontes naturais de compostos que contém a função aldeído, cetona e ácido carboxílico.

Resposta correta: A

10. Veja a reação de esterificação da morfina:

Morfina (Contém função álcool) + ácido carboxílico → Heroína (Contém função éster) + H_2O

Resposta correta: D

(PÁGINAS 113 E 114)

COMENTÁRIOS – ATIVIDADES PARA SALA

1. Veja a reação:

$$H_3C - \underset{\underset{\textstyle C\ell}{|}}{CH} - CH_2 - CH_3 + NaOH \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_3C - \underset{\underset{\textstyle OH}{|}}{CH} - CH_2 - CH_3 + NaC\ell$$

O álcool secundário sofre desidratação intramolecular:

$$\underset{\underset{\textstyle H}{|}}{CH_2}{-}\underset{\underset{\textstyle OH}{|}}{CH}{-}CH_2{-}CH_3 \longrightarrow \underbrace{H_2C{=}CH{-}CH_2{-}CH_3}_{\text{2-Buteno}} + H_2O$$

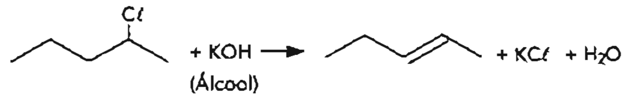
Resposta correta: A

2. Na reação, o haleto (Br) é substituído pela hidroxila. Portanto, a reação é dita de substituição.

Resposta correta: B

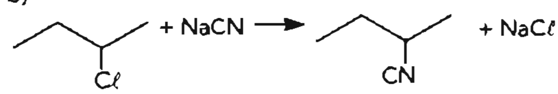
3.

a)



(Álcool)

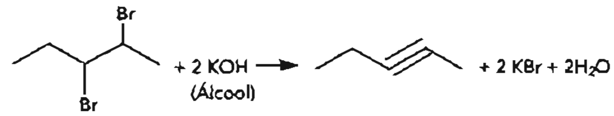
b)



c)

$$H_3C - CH_2 - CH_2 - Br + NaOH_{(aq)} \longrightarrow CH_3CH_2CH_2 - OH + NaBr$$

d)



(Álcool)

e)

$$CH_3{-}\overset{\overset{\textstyle I}{|}}{\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{C}}{-}CH_3 + H_2 \xrightarrow{\text{cata.}} CH_3{-}\overset{\overset{\textstyle H}{|}}{\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{C}}{-}CH_3 + HI$$

4. Temos um haleto reagindo com metal sódio. Veja a reação:

$$2H_3C{-}\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{CH}{-}C\ell + 2Na \longrightarrow 2NaC\ell + H_3C{-}\underset{\underset{\textstyle CH_3}{|}}{CH}{-}\overset{\overset{\textstyle CH_3}{|}}{CH}{-}CH_3$$

(2,3-dimetil-butano)

Nota: veja o método de Wurtz de forma geral:
$2R - y + 2Na \rightarrow R - R + 2Na^+y^-$

Resposta correta: A

5. Veja:

$$H_3C - \underset{\underset{\textstyle C\ell}{|}}{CH} - CH_3 + \underset{\underset{\textstyle C\ell}{|}}{H_2C} - CH_3 \xrightarrow{Na^0}$$

$$\longrightarrow H_3C - \underset{\underset{\textstyle CH_2 - CH_3}{|}}{CH} - CH_3 + 2NaC\ell$$

(Cloreto de sódio)

(2-metil-butano)

Resposta correta: E

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.

$$H_3C{-}CH_3 + C\ell_2 \longrightarrow \underbrace{H_3C{-}CH_2{-}C\ell}_{A} + \underbrace{HC\ell}_{X}$$

$$\underbrace{2H_3C{-}CH_2{-}C\ell}_{A} + 2Na \longrightarrow \underbrace{CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3}_{B} + \underbrace{2NaC\ell}_{Y}$$

$$\underbrace{H_3C - CH_2 - CH_2 - CH_3}_{B} + C\ell_2 \longrightarrow \underbrace{H_3C - CH_2 - \underset{\underset{\textstyle C\ell}{|}}{CH} - CH_3}_{C} + \underbrace{HC\ell}_{Z}$$

$$H_3C-CH_2-\underset{\underset{C}{Cl}}{CH}-CH_3 + KOH \rightarrow \underset{D}{H_3C-CH=CH-CH_3} + \underset{W}{KCl} + \underset{R}{H_2O}$$

2. Veja:

$$H_3C-\underset{\boxed{Br}}{\overset{CH_3}{C}}-\underset{\boxed{H}}{CH_2} \rightarrow H_3C-\overset{CH_3}{C}=CH_2 + HBr$$

Resposta correta: B

3.

$$H_3C-\underset{CH_3}{CH}-CH_2-CH_2-CH_3 + Cl_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow H_3C-\underset{CH_3}{CH}-CH_2-CH_2-\overset{Cl}{CH_2} + HCl$$

O halogênio pode se ligar a qualquer um dos cinco carbonos da cadeia principal (alguns terão mais estabilidade que outros).

Resposta correta: B

4. O cloreto de metilmagnésio é um composto de Grignard, portanto, a ligação entre Mg e Cℓ deve ser predominantemente iônica. Veja:
$R - Mg^+X^-$ (Grignard)

Resposta correta: D

5. Veja:

$$CO_2 + R-MgY \rightarrow O=C(O^-Mg^+Y) \xrightarrow{HX} \underbrace{H-C(=O)-OH}_{\text{ácido carboxílico}} + XMgY$$

Resposta correta: E

6. Veja:

$$\underset{(A)}{H_3C-\underset{Cl}{CH}-CH_2CH_3} + Mg \rightarrow H_3C-\underset{Mg^+Cl^-}{CH}-CH_2CH_3 \xrightarrow{H_2O}$$

$$H_3C-\underset{H}{CH}-CH_2CH_3$$

(n-butano)

Por outro lado,

$$2H_3C-\underset{Cl}{CH}-CH_2CH_3 + 2Na \rightarrow$$

$$\rightarrow H_3C-\underset{CH_3CHCH_2CH_3}{CH}-CH_2CH_3 + 2NaCl$$

(3,4-dimetilhexano)

(A) é o 2-clorobutano.

Resposta correta: E

7. Veja a reação:

$$H_3C-\underset{Cl}{CH}-CH_2-CH_3 + KOH \rightarrow H_3C-\underset{OH}{CH}-CH_2-CH_3 + KCl$$

(2-butanol)

Resposta correta: C

8. Veja.

$$2\,CH_3-\underset{CH_3}{CH}-Cl + 2Na \rightarrow CH_3-\underset{CH_3}{CH}-\underset{CH_3}{CH}-CH_3$$

(2,3-dimetilbutano)

Resposta correta: C

9. Veja as reações:

$$(A)\ 2\,CH_3-I + 2\,Na^0 \longrightarrow \underset{(etano)}{CH_3-CH_3} + \underset{(iodeto\ de\ sódio)}{2\,NaI}$$

$$(B)\ 2\,CH_3-CH_2-I + 2\,Na^0 \longrightarrow \underset{(butano)}{CH_3-CH_2-CH_2-CH_3} + 2\,NaI$$

Além dessas duas reações, pode ocorrer a formação de propano.

$$CH_3-CH_2^- + CH_3^+ \longrightarrow \underset{(propano)}{CH_3-CH_2-CH_3}$$

Resposta correta: D

10. Veja:

$$\underset{H}{H_2C}-CH-\underset{Br}{CH}-\underset{H}{CH}-CH_3 + KOH \rightarrow \begin{cases} \underset{(1\text{-buteno})}{H_2C=CH-CH_2-CH_3} \\ \underset{(2\text{-buteno})}{H_3C-CH=CH-CH_3} \end{cases}$$

Resposta correta: E

(PÁGINAS 115 A 117)

ATIVIDADES PARA SALA

1. Sabemos que álcoois secundários, quando oxidados, originam cetonas. Portanto, o processo inverso também ocorre, ou seja, redução de cetonas origina álcoois secundários.
Veja:

$$R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R' + 2[H] \rightarrow R-\underset{OH}{\overset{H}{C}}-R'$$

Resposta correta: D

2. Veja:

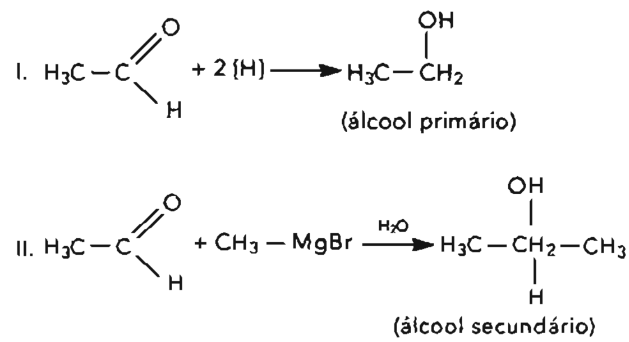
$$H-C(=O)-H \xrightarrow[(I)]{oxidação} H-C(=O)-OH \xrightarrow[(II)]{oxidação} CO_2 + H_2O$$

Resposta correta: C

3. A presença do oxigênio no grupo C=O permite a interação com os hidrogênios da água. Fato que lhe confere solubilidade nesse solvente. Entretanto, como não há hidrogênio unido a oxigênio na cetona, não há ligação de hidrogênio e sim dipolo permanente. Assim, ambos se assemelham.
Todavia, na propanona há impedimento na reação com nitrato. Fato observado para o aldeído. Trata-se de uma reação de diferenciação com o Reativo de Tollens em que o aldeído é oxidado, mas a cetona não.

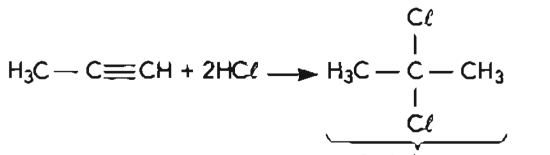
Resposta correta: D

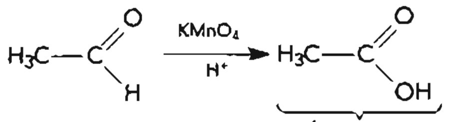
4. Veja:

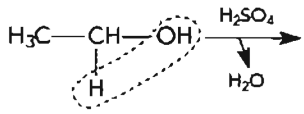


Resposta correta: E

5.


A → 2,2-dicloropropano

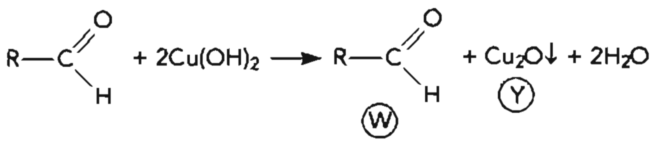

B → Ácido etanoico


C → Eteno

Resposta correta: C

ATIVIDADES PROPOSTAS

1.



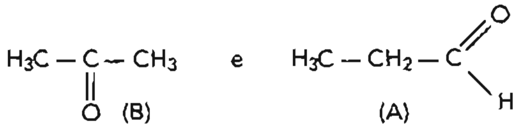
Resposta correta: A

2. O reagente de Tollens é usado para identificação de aldeídos, servindo, portanto, para diferenciar estes de cetonas.

Nota: O teste é positivo após a identificação de um "espelho de prata" que se forma na superfície do recipiente.

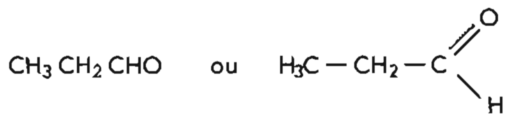
Resposta correta: D

3. O reagente de Benedict ou Fehling age na oxidação de aldeídos, não ocorrendo, contudo, com cetonas. Portanto, **A** e **B** (C_3H_6O) são isômeros de função. Veja:



Resposta correta: C

4. Como diz explicitamente o enunciado do problema, o teste de Tollens é positivo com aldeídos. Das opções, o item B trás um aldeído.



Resposta correta: B

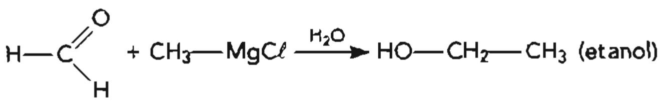
5. I. (F) Apenas aldeídos.
II. (V)
III. (V)
IV. (V)

Resposta correta: D

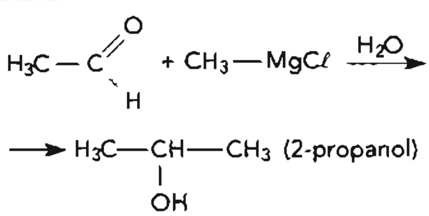
6. Glicose e frutose, apesar de possuírem a mesma fórmula molecular, possuem grupos funcionais não totalmente iguais. A primeira apresenta aldoxilo, enquanto que a segunda não. Portanto, são isômeros funcionais e reagem de forma distinta. Todavia, ambas são carboidratos presentes em frutas.

Resposta correta: E

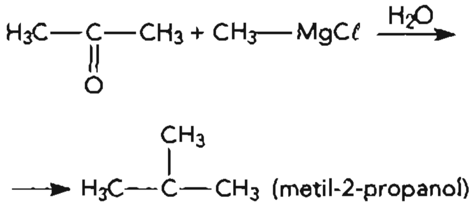
7. Veja.
Metanal



Etanal

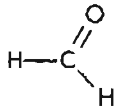


Propanona



Resposta correta: B, C, E

8. O formaldeído é o seguinte aldeído:



metanal

O metanol é **oxidado** a **ácido metanoico** e **reduzido** a metalnol ou **álcool metílico**.
A **solução aquosa** de formaldeído é denominada **formol**.

Resposta correta: E

9.
(F) Apresenta as funções: amina, cetona e álcool.
(F) Apresenta centro estereogênico, logo há atividade óptica.
(V)
(V)
(V)

Resposta correta: F, F, V, V, V

10.
(V)
(F) Apresenta o grupo funcional: aldeído.
(V)
(V)
(V)

Resposta correta: V, F, V, V, V

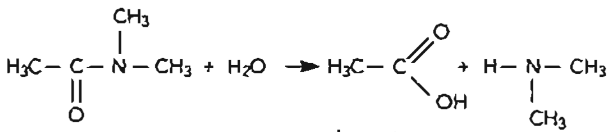
(PÁGINAS 118 A 120)

ATIVIDADES PARA SALA

1.
(V)
(F)
(F) São mais voláteis.
(V)
(F)

Resposta correta: V, F, F, V, F

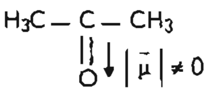
2. Veja a reação de hidrólise:



(Ác. acético) (dimetilamina)

Resposta correta: D

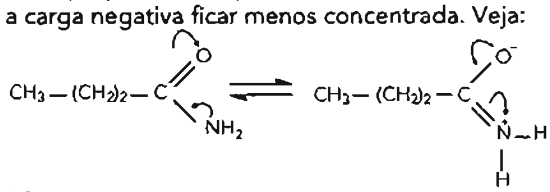
3. Cetonas são polares. Veja:



Nota: o composto III é mais básico que (IV) pelo fato deste último apresentar ressonância na carbonila.

Resposta correta: B

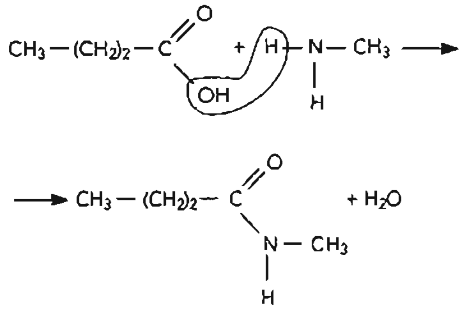
4.
I. (V) Amoníaco = $NH_{3(aq)}$
II. (V)
III. (F) A propanamida apresenta ressonância, o que faz a carga negativa ficar menos concentrada. Veja:



IV. (V)

Resposta correta: A

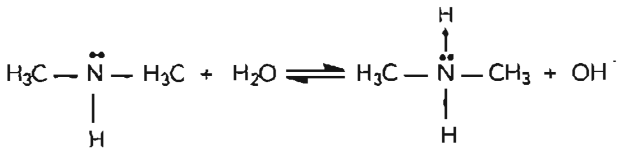
5. Veja a reação:



Resposta correta: A

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Em água, a dimetilamina tem caráter básico. Veja:



Resposta correta: E

2. O composto **B** apresenta o grupo funcional de uma amida. Assim, se **A** é a substância responsável, deve estar ausente a enzima que permite a síntese da mesma, ou seja, que forma o grupo funcional presente em sua estrutura; o ácido carboxílico.

Resposta correta: B

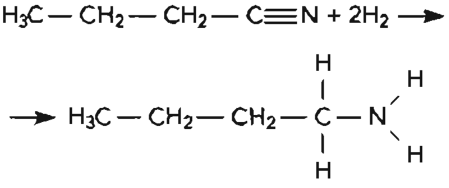
3.
a) $\longrightarrow \underset{(A)}{H_3C-CH_2-NH_3^+} + \underset{(B)}{OH^-}$

b) $\longrightarrow \underset{(C)}{H_3C-CH_2-NH_3^+} + \underset{(D)}{C\ell^-}$

c) $\longrightarrow \underset{(E)}{CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{NH_2^+}}} + \underset{(F)}{OH^-}$

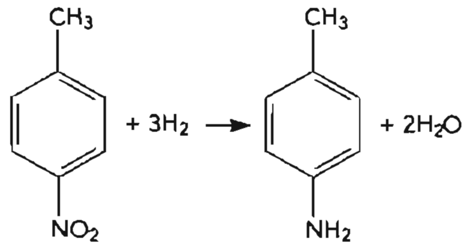
d) $\longrightarrow \underset{(G)}{CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{NH_2^+}}} + \underset{(H)}{C\ell^-}$

4.

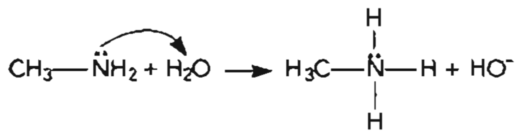


Butilamina

5.

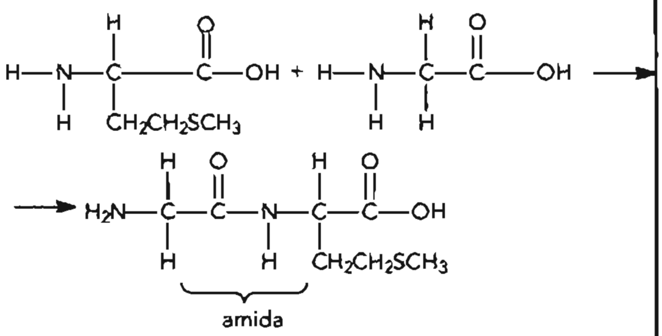


6. A metilamina apresenta comportamento básico em água. Veja:



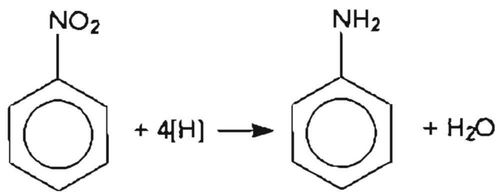
Resposta correta: D

7.



Resposta correta: C

8. Veja a reação de redução do nitrobenzeno:

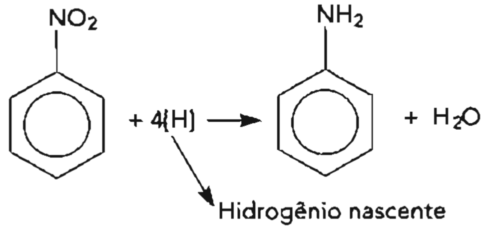


(Fenilamina)

Nota: a fenilamina (ou anilina) é usada na fabricação de tintas.

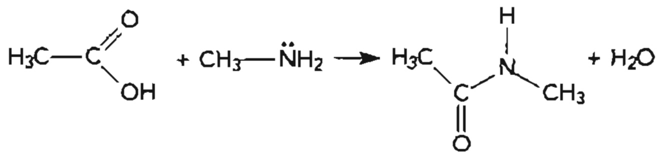
Resposta correta: C

9. Veja.



Resposta correta: D

10.



Resposta correta: E