45. João escreveu o número 10 como soma de duas parcelas inteiras positivas, cujo produto é o maior possível. O valor desse produto é:

A) 9.
B) 16.
C) 21.
D) 25.
E) 27.

Questão 45 – Alternativa D
Solução: A alternativa **D** está correta.
As únicas possibilidades são 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6 e 5 + 5, às quais correspondem os produtos 9, 16, 21, 24 e 25. Logo, o maior valor do produto é 25.

46. Sobre a função $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ dada por $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, é correto afirmar que:

A) f é estritamente crescente.
B) f é estritamente decrescente.
C) o gráfico de f é uma parábola.
D) $f \circ f = f$.
E) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in [0, +\infty)$.

Questão 46 – Alternativa A
Solução: A alternativa **A** está correta.
A função f é estritamente crescente se e só se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Mas para $x, y \geq 0$ temos

$$f(x) < f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow x(y+1) < y(x+1) \Leftrightarrow x < y.$$

O argumento acima mostra que a alternativa **A** é correta e elimina a alternativa **B**.

Quanto à alternativa **C**, como $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ e o gráfico de $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x > 0$, é um ramo de hipérbole, é imediato ver que o mesmo sucede com o gráfico de f. A função composta de f consigo mesma tem expressão

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1},$$

eliminando assim a alternativa **D**. Por fim, como $f(1) + f(1) \neq f(2)$, a alternativa **E** também é falsa.

47. Seja $f:(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\to R$ a função definida por $f(x)=\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. É correto afirmar que:

A) $f(1)=2$.
B) $f(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$ $se\ x\geq 1$.
C) $f(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$ $se\ x\leq -1$.
D) $f(x)=-x+\sqrt{x^2-1}$ $se\ x\leq -1$.
E) $f(x)=0$ para todo real x no domínio de f.

Questão 47 – Alternativa C
Solução: A alternativa **C** está correta.

Veja que $0 \le x^2 - 1 < x^2$ para todo real *x* tal que $|x| \ge 1$; portanto, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|$ para tais *x*. Para $x \le -1$, temos $|x| = -x$, e daí $\sqrt{x^2-1} < -x$, ou ainda $\sqrt{x^2-1} + x < 0$. Logo,

$$f(x) = \left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = -\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = -x - \sqrt{x^2-1}$$

para $x \le -1$.

A discussão acima também mostra que as alternativas **D** e **E** são falsas. Para $x \ge 1$, temos como acima, que $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ e, consequentemente, $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$; logo, a alternativa **B** é falsa. Por fim, a alternativa **A** é falsa, pois *f*(1) = 1 ≠ 2.

48. Em um contêiner de 10 m de comprimento, 8 m de largura e 6 m de altura, podemos facilmente empilhar 12 cilindros de 1 m de raio e 10 m de altura cada, bastando dispô-los horizontalmente, em três camadas de quatro cilindros cada. Porém, ao fazê-lo, um certo volume do contêiner sobrará como espaço vazio. Adotando 3,14 como aproximação para π, é correto afirmar que a capacidade volumétrica desse espaço vazio é:

A) inferior à capacidade de um cilindro.
B) maior que a capacidade de um cilindro mas menor que a capacidade de dois cilindros.
C) maior que a capacidade de dois cilindros mas menor que a capacidade de três cilindros.
D) maior que a capacidade de três cilindros mas menor que a capacidade de quatro cilindros.
E) maior que a capacidade de quatro cilindros.

Questão 48 – Alternativa D
Solução: A alternativa **D** está correta.

O volume do contêiner é igual a 480 m^3; o volume de um cilindro é igual a π x 1^2 x 10 = 31,4 m^3, de maneira que o volume dos doze cilindros juntos é igual a 12 x 31,4 = 376,8 m^3. Portanto, o volume do espaço vazio é igual a 480 – 376,8 = 103,2 m^3, o que corresponde ao volume de mais de três e menos de quatro cilindros.

49. Em um sistema Cartesiano de coordenadas, o valor positivo de *b* tal que a reta *y* = *x* + *b* é tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ é:

A) 2.
B) 1.
C) $\sqrt{2}$.
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
E) 3.

Questão 49 – Alternativa C
Solução 1: A alternativa **C** está correta.

A reta tangente, sendo da forma *y* = *x* + *b*, tem coeficiente angular 1 e tangencia o círculo em um ponto (e, *f*) tal que *e*, *f* ≠ 0, $f = e + b$ e $e^2 + f^2 = 1$ (*). Por outro lado, dado um ponto (*e*, *f*) do círculo $x^2 + y^2 = 1$ com *e*, *f* ≠ 0, a reta passando pela origem e pelo ponto dado tem coeficiente angular *f*/*e*. Como a tangente a um círculo por um ponto do mesmo circulo é perpendicular ao raio que passa pelo ponto, segue que a reta tangente ao círculo no ponto (*e*, *f*) tem coeficiente angular – *e*/*f*.

Comparando os dois valores para o coeficiente angular da tangente, obtemos *e* = – *f*, relação que substituída em (*) fornece (*e*, *f*) = $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Segue agora de *b* = *f* – *e* > 0 que (*e*, *f*) = $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e daí $b = \sqrt{2}$. Assim, a reta tangente procurada tem equação $y = x + \sqrt{2}$.

Solução 2.

A reta *y* = *x* + *b* será tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ se e só se o sistema de equações

$$\begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

tiver uma única solução. Substituindo a expressão para *y* na segunda equação, obtemos a equação de segundo grau $x^2 + (x+b)^2 = 1$, que deve então ter raízes iguais. Logo, seu discriminante deve ser identicamente nulo, o que nos fornece a equação $(2b)^2 - 4.2(b^2 - 1) = 0$, ou ainda $b^2 = 2$. Como $b > 0$, temos $b = \sqrt{2}$.

50. Uma garrafa está cheia de uma mistura, na qual 2/3 do conteúdo é composto pelo produto A e 1/3 pelo produto B. Uma segunda garrafa, com o dobro da capacidade da primeira, está cheia de uma mistura dos mesmos produtos da primeira garrafa, sendo agora 3/5 do conteúdo composto pelo produto A e 2/5 pelo produto B. O conteúdo das duas garrafas é derramado em uma terceira garrafa, com o triplo da capacidade da primeira. Que fração do conteúdo da terceira garrafa corresponde ao produto A?

A) 10/15
B) 5/15
C) 28/45
D) 17/45
E) 3/8

Questão 50 – Alternativa C
Solução: A alternativa **C** está correta.

Denotando por *V* o conteúdo da primeira garrafa, temos que o conteúdo da segunda garrafa é 2*V* e da terceira garrafa é 3*V*. Agora, o conteúdo do produto *A* na primeira garrafa é (2/3)*V* e o conteúdo do produto *A* na terceira garrafa é (3/5).2*V*, de maneira que o conteúdo de *A* na terceira garrafa é (2/3)*V* + (6/5)*V* = (28/15)*V*. Segue daí que a fração do produto *A* na terceira garrafa é

$$\frac{\left(\frac{28}{15}\right)V}{3V} = \frac{28}{45}.$$

51. Dois dos ângulos internos de um triângulo têm medidas iguais a 30° e 105°. Sabendo que o lado oposto ao ângulo de medida 105° mede $(\sqrt{3}+1)$ cm, é correto afirmar que a área do triângulo mede, em cm^2:

A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.
B) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+3$.
C) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+3)$.
D) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
E) $2+\sqrt{3}$.

Questão 51 – Alternativa A
Solução: A alternativa **A** está correta.

Seja *ABC* o triângulo, com $\angle B$ = 105° e $\angle C$ = 30°. Como a soma dos ângulos de um triângulo é sempre igual a 180°, segue que $\angle A$ = 45°. Também, $AC = \sqrt{3}+1$. A partir disso, temos duas alternativas de solução:

i. Pela lei dos senos, temos $\frac{BC}{AC} = \frac{sen\,45^0}{sen\,105^0}$. As fórmulas trigonométricas de adição de arcos nos dão

sen 105° = sen (60° + 45°) = sen 60°cos 45° + sen 45°cos 60° = $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, daí

$BC = AC.\ \dfrac{sen\,45^0}{sen105^0} = (\sqrt{3}+1)\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = 2.$

Por fim, a fórmula do seno para a área de triângulos nos dá

$A(ABC) = \dfrac{1}{2}AC.BC.sen\,30^0 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

ii. Se H é o pé da altura baixada de B à reta suporte do lado AC, então $\angle B > 90°$ garante que H está sobre o lado AC. O triângulo ABH é então retângulo e isósceles; sendo $AH = BH = x$, temos $CH = \sqrt{3}+1-x$, e assim

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = tg30^0 = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{x}{\sqrt{3}+1-x}$,

o que nos dá $x = 1$. Logo, $A(ABC) = \dfrac{1}{2}AC.BH = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

52. Seja $A = \{x \in N;\ 1 \le x \le 10^{12}\}$, em que N indica o conjunto dos números naturais. O número de elementos de A que não são quadrados perfeitos ou cubos perfeitos é igual a:

A) 10^6.
B) $10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2$.
C) $10^{12} - 10^6 + 10^4 - 10^2$.
D) $10^{12} + 10^6 + 10^4 + 10^2$.
E) $10^6 + 10^4 + 10^2$.

Questão 52 – Alternativa B
Solução: A alternativa **B** está correta.

Em tudo o que segue, denotamos por # X o número de elementos de um conjunto finito X. Se $A = \{x \in N; 1 \le x \le 10^{12}\}$, $B = \{x \in A; x\ é\ quadrado\ perfeito\} = \{1^2, 2^2, 3^2, ..., (10^6)^2\}$ e $C = \{x \in A; x\ é\ cubo\ perfeito\} = \{1^3, 2^3, 3^3, ..., (10^4)^3\}$, queremos calcular k = # $(A - (B \cup C))$. Como $(B \cup C) \subset A$, temos k = # A – #$(B \cup C)$. Por outro lado temos # $(B \cup C)$ = # B + # C – # $(B \cap C)$, de maneira que

k = # A – # B – # C + #. $(B \cap C)$.

Agora, é imediato que # $A = 10^{12}$, # $B = 10^6$, # $C = 10^4$ e

$B \cap C = \{x \in A; x\ é\ sexta\ potência\ perfeita\} = \{1^6, 2^6, 3^6, ..., (10^2)^6\}$

de maneira que $\#(B \cap C) = 10^2$. Logo,

$$k = 10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2 \ .$$